Handout zu Beweistechniken

erstellt vom Lernzentrum Informatik auf Basis von [Kre13],[Bün]

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein Beweis?

- vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage
- Eine Aussage enthält überlicherwiese Vorraussetzungen und Behauptungen
- Argumentation muss die Gültigkeit der Behauptungen in all den Situationen nachweisen, in denen die Vorraussetzung gilt
- Die Vollständigkeit einer Argumentation verlangt, dass die Argumentation jeden möglichen Einzelfall überdeckt
- Die Folgerichtigkeit verlangt, dass jedes einzelne Argument in der Argumentationskette als korrekt abgesichert ist und auch von einem nicht wohlgesonnenn Leser akzeptiert werden muss

2 Was ist Vorraussetzung, was ist Behauptung?

Im folgenden sind die wichtigsten Formulierungen und ihre Bedeutung aufgelistet:

- Wenn A, so (dann) B
  - A wird zur Vorraussetzung, B wird zur Behauptung
  - auch A impliziert B, aus A folgt B, B wenn A, $A \Rightarrow B$
  - Achtung: wenn B gilt, muss A nicht gelten (A muss nicht der Grund sein)
- A genau dann, wenn B, zwei Aussagen A und B sind äquivalent
  - dies entspricht: "Wenn A so B“ und "Wenn B so A“ ($A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$
  - zu Beweisen ist also einmal "Wenn A so B“ und zum Anderen "Wenn B so A“

- Für alle x gilt A bzw. Für alle x gilt A(x)
  - Die Argumentation muss nun die Gültigkeit von A nachweisen, egal welchen konkreten Wert x bekommt. Deswegen setzt man an: Vorraussetzung: Sei x ein beliebiges gewähltes Element. Behauptung: Für dieses Element gilt A(x)
  - folgende Argumente dürfen keine Annahmen darüber benutzen wolchen der vielen möglichen Werte x hat. Sie dürfen aber von einer einmal für die gesamte Argumentation unveränderten Wahl ausgehen.
- Für alle x aus der Menge M gilt A(x)
  - Dies entspricht: Für alle x gilt: Wenn x $\in$M, so gilt A(x)
- Es gibt/existiert ein x, für das A(x)
  - Es gibt mindestens eins
- Es gibt ein x in der Menge M mit A(x)
  - Es gibt ein x, für das gilt: x$\in$M und es gilt A(x)

3 Beweisarten

Die wesentlichen Beweisarten sind:
Deduktive Beweise: bei sequentieller Verarbeitung
Wiederlegungsbeweise und Gegegenbeispiele: Unmöglichkeitsaussagen Induktionsbeweise: Rekursion/Schleifen

3.1 Deduktive Beweisführung

Deduktive Beweisführung: Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- Der Beweis entspricht einer Folge von Zwischenaussagen
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen

  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- Zulässige Arguemtne in Beweisschritt
  - Logische Schluss: Sind A und A $\Rightarrow$ B bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundsätze (z.B. Arithmetik)
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen:
M=M' genau dann wenn M$\subseteq$ M'$\wedge$M'$\subseteq$M
M$\subseteq$ M' genau dann wenn ($\forall$x) x $\in$M$\Rightarrow$ x $\in$M'
  - Gleichheit von zahlen: x=y genau dann wenn weder x<y noch x>y

Beispiel für Auflösen von Definitionen
Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S (bezüglich U) endlich ist, dann ist U endlich.
Definitionen:
S endlich $\equiv$ Es gibt eine Zahl n mit $\|S\| = n$
T Komplement von S $\equiv$ $T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$
Beweis:

Aussage	Beweis
1. S endlich	Gegeben
2. T Komplement von S	Gegeben
3. T endlich	Gegeben
4. $\|S\| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (1)
5. $\|T\| = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (3)
6. $T \cup S = U$	Auflösen der Definition in (2)
7. $T \cap S = \emptyset$	Auflösen der Definition in (2)
8. $\|U\| = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$	(4), (5), (6), (7) und Gesetze der Kardinalität
9. U endlich	Einsetzen der Definition in (8)

3.2 Wiederlegungsbeweise

Zeige dass eine Aussage A nicht gilt:

- Beweis durch Widerspruch: A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
- Beweis durch Gegenbeispiel: A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
- Beweis durch Kontraposition:
  - Statt wenn H dann K zeige: Wenn nicht K dann nicht H
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung
  - Zeige, dass aus "H und nicht K“ ein Widerspruch folgt, Aussagenlogisch äquivalent zu "Wenn H dann K“

Beispiel für Beweis durch Widerspruch
Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Kompelent von S (bezüglich U) unendlich.
Beweis:

Aussage	Beweis
1. S endlich	Gegeben
2. T Komplement von S	Gegeben
3. U unendlich	Gegeben
4. T endlich	Annahme
5. U endlich	(1), (4) mit Satz aus Beweis zuvor
6. Widerspruch	(3),(5)
7. T unendlich	Annahme (4) muss falsch sein

3.3 Induktive Beweise

- beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen
  - Standartinduktion:
    Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle n≥i

- Vollständige Induktion:
  Folgt A für n, wenn A für alle j<n mit j≥i gilt, dann gilt A für alle n≥ i
  Mächtiger, da man nicht den unmittelbaren Vorgänger benutzen muss

- Strukturelle Induktion

  - Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur
    Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengeseteztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente
  - Häufig eingesetzt für die Analyse von Baumstrukturen (suchen, sortieren), syntaktische Strukturen (Formeln, Programmierpsrachen,...)

Beispiel Induktion
Für alle $n \geq 1$ gilt $n^2 \geq n$.
Beweis: Induktion über n. 1. Induktionsanfang: Zeige Eigenschaft E für n=1
Es gilt offensichtli $1^2 = 1$ Also ist der Induktionsanfang gezeigt.
2. Induktionsschritt: $(n \to n+1)$
Es ist zu zeigen, dass $(n+1)^2 \geq (n+1)$ gilt. Die Induktionsvorraussetzung ist $n^2?n$.
Es gilt $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Mit der Induktionsvorraussetzung erhalten wir $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n + 2n + 1 \geq n + 1$ 3. Den Beweis des Satzes beenden wir mit q.e.d.

4 Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit ”üblichen“ Vorkenntnissen erklärbar sein
- Tipp: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrungen haben. Bei der Präsentation für andere zentrale Gedanken aus der Lösung extrahieren

- Test: verstehen Kommilitonen die Lösung und warum sie funktioniert?

Literatur

[Bün] BÜNING, Prof. Doktor K.: *Folien Veranstaltung Modellierung*

[Kre13] KREITZ, Prof. C.: *Folien Veranstaltung Theoretische Informatik*. letzter Zugriff 04.2013