Datenstrukturen und Algorithmen

SS 2016

Prof. Dr. Christian Scheideler

Organisatorisches

Vorlesung:

- Mo 11:15 - 12:45 Hörsaal L1
- Fr 11:15 - 12:45 Hörsaal L1

Zentralübung:

- Mo 13:00 – 13:45 Hörsaal L1
- Beginn: übernächste Woche

Übungen:

- Beginn: nächste Woche

Organisatorisches

Übungen:

- Jede Woche ein Übungsblatt (Montags)
- 1. Blatt nächsten Montag auf der Kurswebseite
- Abgabe: nächsten Montag bis 11:15 Uhr, D3-Flur
  verspätete Abgaben werden nicht berücksichtigt!
- Gruppengröße: bis zu 3 Personen
- Vorstellung von Musterlösungen in der Zentralübung
- Bonuspunkte (falls Klausur bestanden):
  - mind. 60% der Übungspunkte und einmal vorrechnen: 1/3 Note
  - alle Programmieraufgaben bis auf eine erfolgreich: 1/3 Note

Organisatorisches

Übungsgruppen:

- Anmeldung über PAUL
- Übungsgruppenzeiten: siehe Kurswebseite

http://www-old.cs.uni-paderborn.de/fachgebiete/fg-ti/lehre0/ss2016/datenstrukturen-und-algorithmen.html

Organisatorisches

Klausur:

- Eine Korrelation mit den Übungsaufgaben ist zu erwarten
- Es gab in der Vergangenheit einen direkten Zusammenhang zwischen Übungsteilnahme/abgabe und gutem Abschneiden bei Klausuren
- Hilfsmittel: ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt

Sprechzeiten:

- Do 16:00 – 17:00 (Raum F2.326; Fürstenallee)
- Fragen/Anmerkungen zunächst an den eigenen Tutor

Organisatorisches

Literatur:

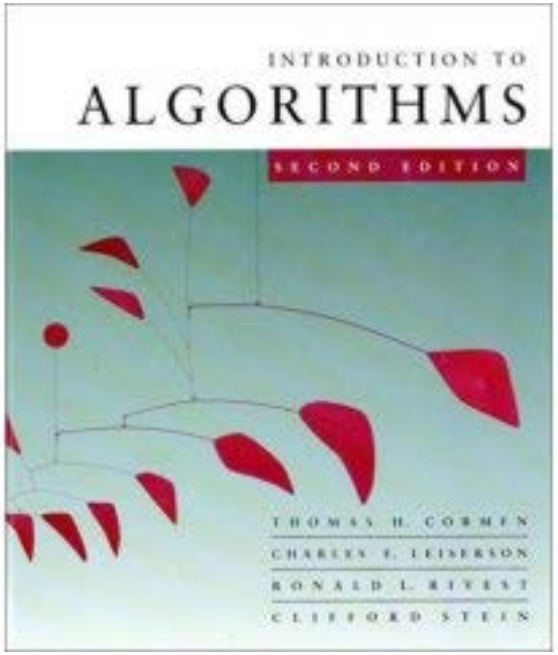
Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:

Introduction to Algorithms, 3rd ed.

MIT Press/McGraw-Hill

ISBN 0-262-53305-8

Weitere Literatur siehe Webseite



Inhaltsangabe:

- Einleitung, Motivation
- Pseudocode, Invarianten, Laufzeitanalyse
- Groß-O-Notation

} Grundlagen

- Inkrementelle Algorithmen: Insertion-Sort
- Divide & Conquer Algorithmen: Merge-Sort
- Quick-Sort Analyse und Varianten
- Rekursionsgleichungen: Master-Theorem
- Algorithmen mit Datenstrukturen: Heaps, Heap-Sort
- Untere Schranke für Vergleichssortierer
- Counting-Sort

} Sortieralgorithmen

- ADTs und Datenstrukturen: Stacks, Queues, Listen, Bäume
- Hashtabellen
- Binäre Suchbäume

} Datenstrukturen

- Elementare Graphalgorithmen: Tiefen- und Breitensuche
- Zusammenhangskomponenten
- Kürzeste Wege: Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume: Algorithmus von Prim und Kruskal

} Graphalgorithmen

- Gierige Algorithmen: Scheduling
- Dynamische Programmierung: Rucksack-Problem
- Amortisierte Laufzeitanalyse
- Optimale Suchbäume

} Entwurfsmethoden

1. Einführung

- Was ist ein Algorithmus (bzw. eine Datenstruktur)?
- Welche Probleme kann man damit lösen?
- Warum betrachten wir (effiziente) Algorithmen?
- Wie beschreiben wir Algorithmen?
- Nach welchen Kriterien beurteilen wir Algorithmen?
- Welche Algorithmen betrachten wir?
- Wie passt *Datenstrukturen und Algorithmen* ins Informatikstudium?

Was ist ein Algorithmus?

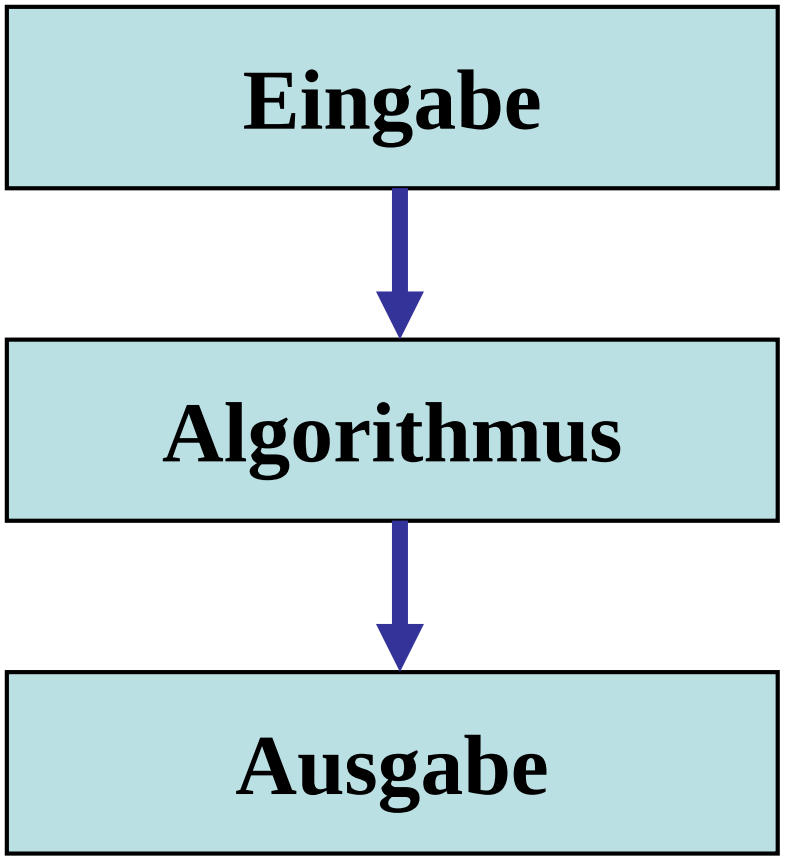
Definition 1.1: Ein *Algorithmus* ist eine eindeutige Beschreibung eines Verfahrens zur Lösung einer bestimmten Klasse von Problemen.

Hier: Ein Algorithmus ist eine Menge von Regeln für ein Verfahren, um aus gewissen Eingabegrößen bestimmte Ausgabegrößen herzuleiten. Dabei muss

1. Das Verfahren in einem endlichen Text beschreibbar sein.
2. Jeder Schritt des Verfahrens auch tatsächlich ausführbar sein.
3. Der Ablauf des Verfahrens zu jedem Zeitpunkt eindeutig definiert sein.

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:



Beispiel Sortieren

Eingabe beim Sortieren: Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ausgabe beim Sortieren: Umordnung $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ der Eingabefolge, so dass $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sortieralgorithmus: Verfahren, das zu jeder Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sortierte Umordnung $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ berechnet.

Eingabe: (31,41,59,26,51,48)

Ausgabe: (26,31,41,48,51,59)

Was ist eine Datenstruktur?

Definition 1.2: Eine *Datenstruktur* ist eine bestimmte Art, Daten im Speicher eines Computers so anzuordnen, dass Operationen wie z.B. *Suchen, Einfügen, Löschen* einfach zu realisieren sind.

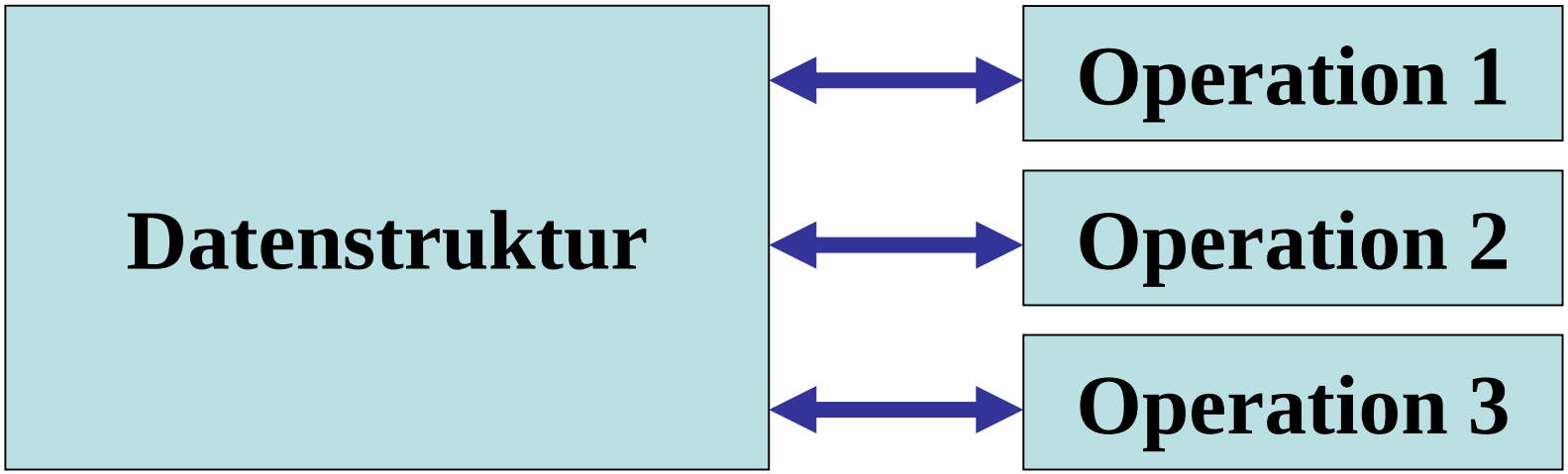
Einfache Beispiele:

- *Listen*
- *Arrays*

Datenstrukturen und Algorithmen sind eng verbunden:
Gute Datenstrukturen sind häufig unerlässlich für gute Algorithmen.

Was ist eine Datenstruktur?

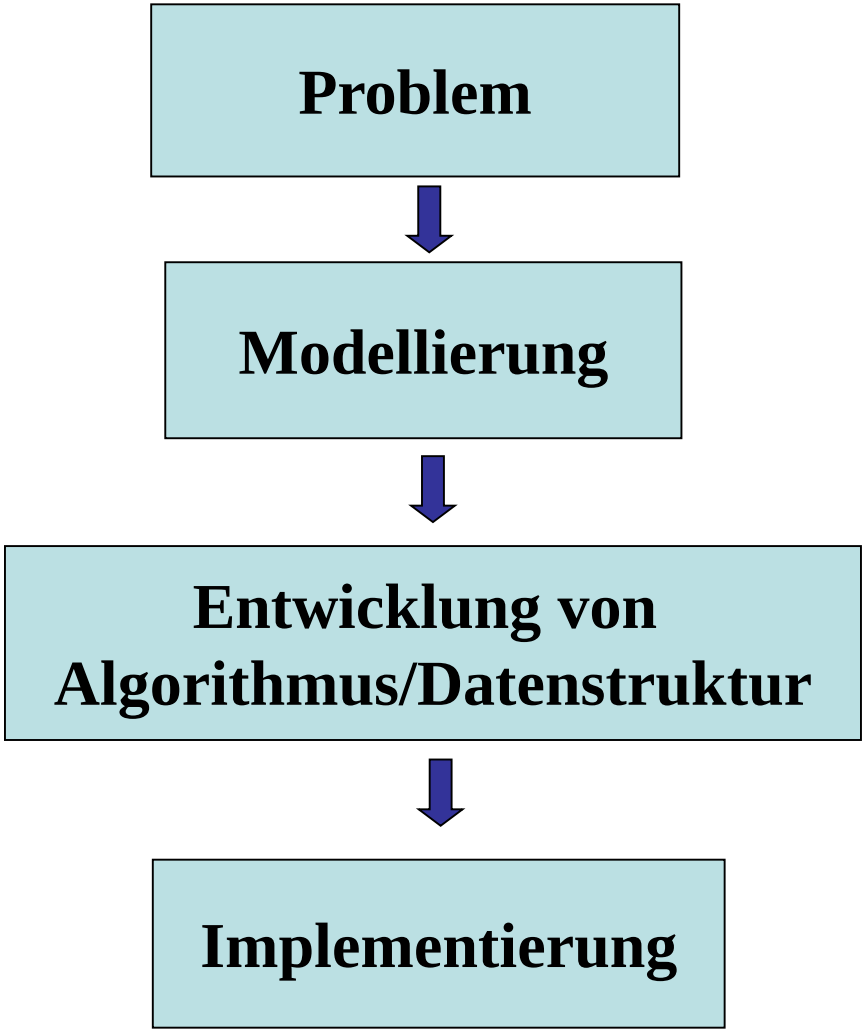
Anschaulich:



Beispielprobleme

- Wie findet ein Navigationssystem gute Verbindungen zwischen zwei Orten? Wie werden im Internet Informationen geroutet?
- Wie berechnet ein Unternehmen eine möglichst gute Aufteilung seiner Ressourcen, um seinen Gewinn zu maximieren?
- Wie werden etwa in Google Informationen schnell gefunden?
- Wie werden Gleichungssysteme der Form $Ax=b$ gelöst?

Softwareentwicklung



Kriterien für Algorithmen

- Algorithmen müssen korrekt sein.

  $\Rightarrow$ Benötigen *Korrektheitsbeweise.*

- Algorithmen sollen zeit- und speichereffizient sein.

  $\Rightarrow$ Benötigen *Analysemethoden für Zeit- und Speicherbedarf*.

- Analyse basiert *nicht auf* empirischen Untersuchungen, sondern auf *mathematischen Analysen*. Nutzen hierfür *Pseudocode* und *Basisoperationen.*

Algorithmenentwurf

Zum Entwurf eines Algorithmus gehören

1. *Beschreibung des Algorithmus*
2. *Korrektheitsbeweis*
3. *Zeit- bzw. Speicherbedarfsanalyse.*

Beschreibung von Algorithmen

- Zunächst informelles (mathematisches) Verfahren zur Lösung.
- Dann Präzisierung durch *Pseudocode.*
- *Keine* Beschreibung durch Programmcode in Java oder C, C++.

Algorithmenentwurf

Warum mathematische Korrektheitsbeweise?

- Fehler können fatale Auswirkungen haben (Steuerungssoftware in Flugzeugen, Autos, AKWs)
- Fehler können selten auftreten („Austesten“ funktioniert nicht)

Der teuerste algorithmische Fehler?

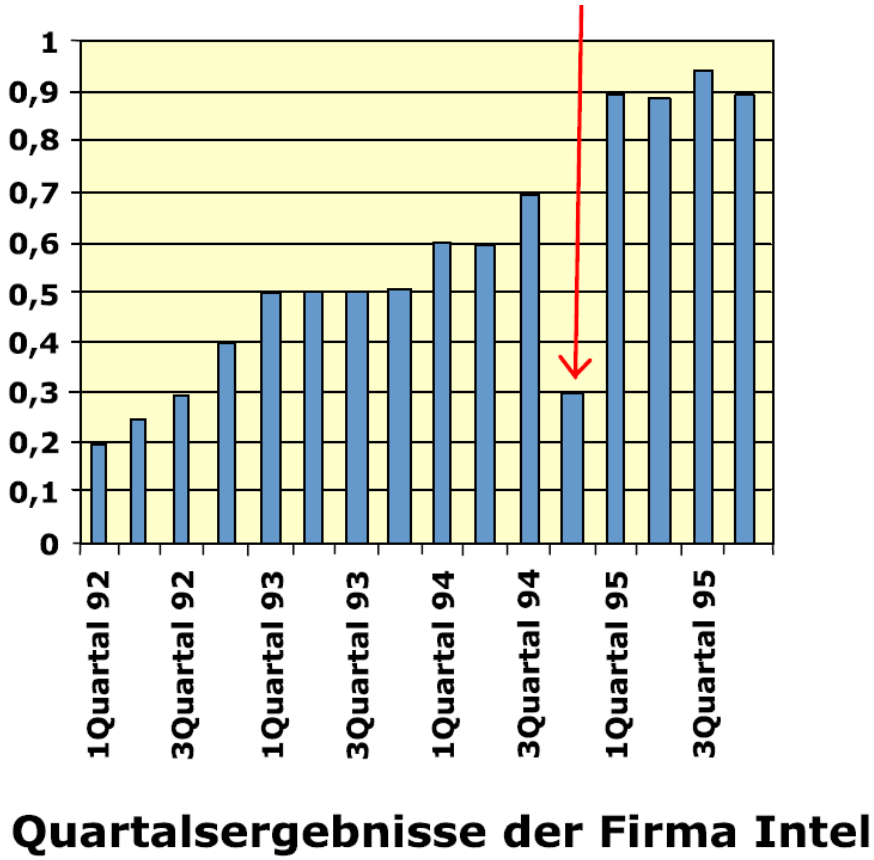
- Pentium bug (≈ $500 Mio.)
- Enormer Imageschaden
- Trat relativ selten auf

Algorithmenentwurf

Die Berechnung von
z = x- (x/y)y
sollte *z=0* ergeben.

Der fehlerhafte Pentium-Prozessor berechnete statt dessen mit den Werten
x=4195835 und
y=3145727
den Wert *z=256*

$480 Mio. entgangener Gewinn



Quartalsergebnisse der Firma Intel

Wozu gute Algorithmen?

- Computer werden zwar immer schneller und Speicher immer größer und billiger, aber
- Geschwindigkeit und Speicher werden immer begrenzt sein.
- Daher muss mit den Ressourcen *Zeit* und *Speicher* geschickt umgegangen werden.
- Außerdem werden in Anwendungen immer größere Datenmengen verarbeitet. Diese wachsen schneller als Geschwindigkeit oder Speicher von Computern.

Effekt guter Algorithmen - Sortieren

Insertion - Sort :

Sortiert n Zahlen mit $c_1 n^2$ Vergleichen.

Computer A :
10^9 Vergleiche/Sek.
$c_1 = 2, n = 10^6$.

Dann benötigt A
$$\frac{2 \cdot (10^6)^2}{10^9} = 2000 \text{ Sek.}$$

Merge - Sort :

Sortiert n Zahlen mit
$c_2 n \log(n)$ Vergleichen.

Computer B :
10^7 Vergleiche/Sek.
$c_2 = 50, n = 10^6$.

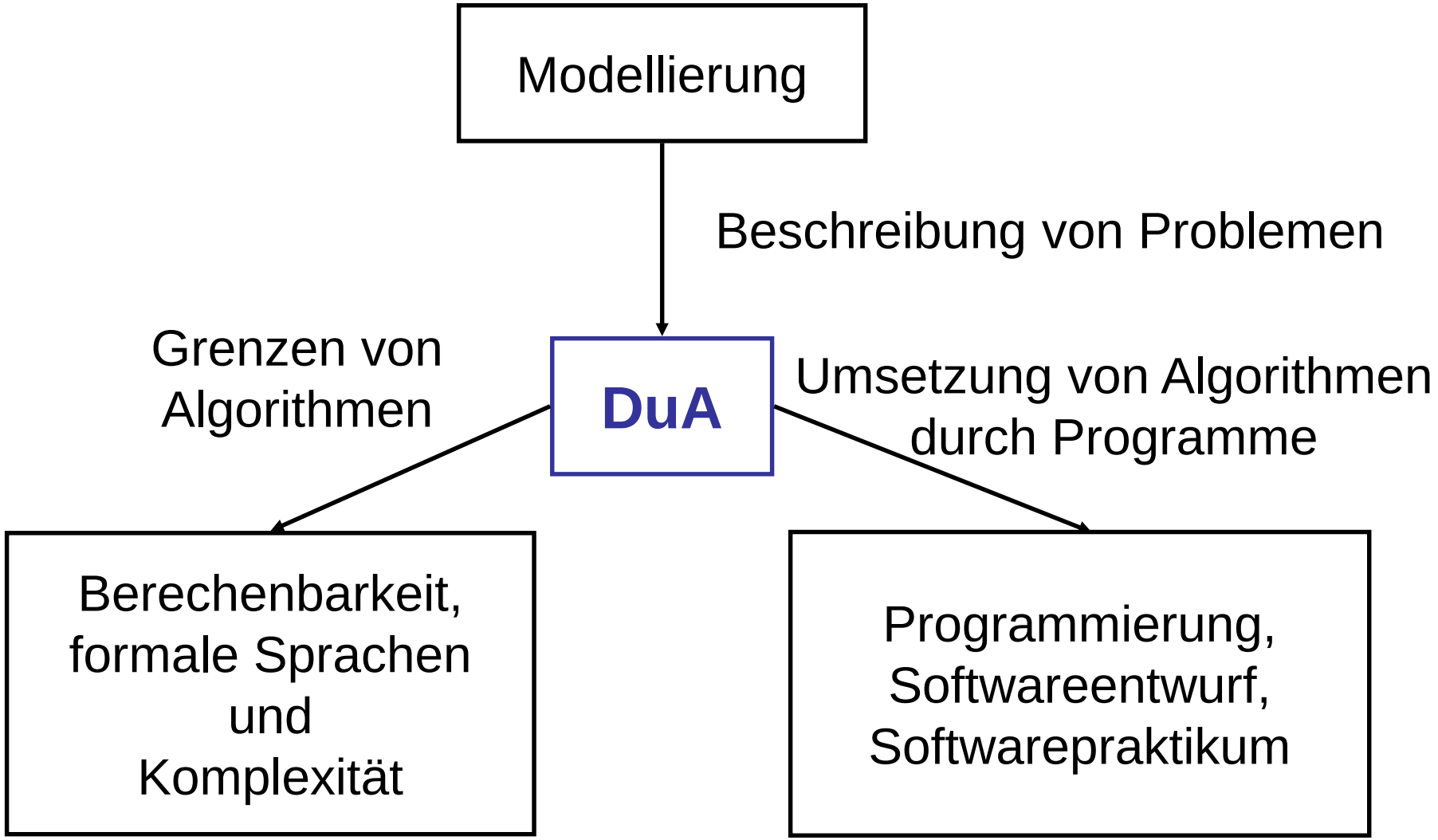
Dann benötigt B
$$\frac{50 \cdot (10^6) \log(10^6)}{10^7} \approx 100 \text{ Sek.}$$

Probleme, Algorithmen, Ziele

Ziel der Vorlesung ist es

1. Wichtige Probleme, Algorithmen und Datenstrukturen kennen zu lernen.
2. Wichtige Algorithmentechniken und Entwurfsmethoden kennen und *anwenden* zu lernen.
3. Wichtige Analysemethoden kennen und *anwenden* zu lernen.
4. Das Zusammenspiel von Datenstrukturen und Algorithmen zu verstehen.

DuA + Info-Studium



Beispiele

Ziel: Einführung in effiziente Algorithmen am Beispiel ganzzahliger Arithmetik

- Notation
- Arithmetik auf großen Zahlen
  - Addition
  - Multiplikation
- Kreisberechnung

Notation

Ganzzahlige Arithmetik:

- Ganze Zahl: Ziffernfolge zur Basis B
- “Zur Basis B”: Ziffern aus $[B] = \{0,\ldots,B-1\}$
- Zahl $a=(a_{n-1}\ldots a_0)_B$ zur Basis B hat den Wert

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \, B^i$$

Wichtige Beispiele:

- B=2: Binärzahlen ($(101)_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0 = 5$)
- B=10: Dezimalzahlen
- B=16: Hexadezimalzahlen ($(A)_{16} = 10$)
  Ziffern: $\{0,\ldots,9\} \cup \{A,B,C,D,E,F\}$

Notation

Pseudocode:

- Schleifen (for, while, repeat)
- Bedingtes Verzweigen (if – then – else)
- (Unter-)Programmaufruf/Übergabe (return)
- Zuweisung durch $\leftarrow$
- Kommentar durch $\triangleright$
- Daten als Objekte mit einzelnen Feldern oder Eigenschaften (z.B. *length*(*A*):= Länge des Arrays *A*)
- Blockstruktur durch Einrückung

Notation

Elementare arithmetische Operationen:

Seien $a,b,c,x,y \in [B]$.

- $(x\ y)_B \leftarrow a+b+c$
- $(x\ y)_B \leftarrow a \cdot b$

Beispiele für $B=10$:

- $(12)_{10} = 5+6+1$
- $(42)_{10} = 6 \cdot 7$

Basis B klar: lassen wir weg

Addition

- Gegeben: zwei Zahlen $a=(a_{n-1}\ldots a_0)$ und $b=(b_{n-1}\ldots b_0)$
- Gesucht: $s=(s_n\ldots s_0)$ mit $s=a+b$

Schulmethode:

		a_{n-1}	…	a_1	a_0	
		b_{n-1}	…	b_1	b_0	
Übertrag	c_n	c_{n-1}	…	c_1	c_0	$\in \{0,1\}$
	s_n	s_{n-1}	…	s_1	s_0	

Addition

Es gilt:

- $c_0 = 0$
- $(c_{i+1}\ s_i) = a_i+b_i+c_i$ für alle $i \geq 0$
- $s_n = c_n$

Algorithmus:

- $c \leftarrow 0$
- for $i \leftarrow 0$ to $n-1$ do
  $(c\ s_i) \leftarrow a_i+b_i+c$
- $s_n \leftarrow c$

for … to … do … - Schleife

Elementaroperation

Addition

Satz 1.3: Die Addition zweier Zahlen der Länge n benötigt höchstens n Elementar-additionen

Beobachtung: Jede Addition n-stelliger Zahlen a und b benötigt mindestens n Elementaradditionen, d.h. unser Algo ist optimal.

Multiplikation

- Gegeben: zwei Zahlen $a=(a_{n-1}\ldots a_0)$ und $b=(b_{n-1}\ldots b_0)$
- Gesucht: $p=(p_{2n-1}\ldots p_0)$ mit $p = a \cdot b$

Schulmethode:

- berechne $a \cdot b_j$ für alle $j \geq 0$
- addiere Ergebnisse versetzt zusammen

Multiplikation

$(a_{n-1} \ldots a_0) \cdot b_j$ $\longrightarrow$ $(c_i\ d_i) = a_i \cdot b_j$

$$
\begin{array}{l}
c_{n-1}\ c_{n-2} \ldots c_0\ \ 0 \\
+\quad d_{n-1} \ldots d_1\ d_0 \\
\text{Übertrag}\quad e_n\ \ e_{n-1} \ldots e_1\ e_0 \\
\hline
p_n\ p_{n-1} \ldots\ \ p_1\ p_0
\end{array}
$$

Algorithmus:

$e \leftarrow 0$; $c_{-1} \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ to $n-1$ do

$(c_i\ d_i) \leftarrow a_i \cdot b_j$; $(e\ p_i) \leftarrow c_{i-1} + d_i + e$

$p_n \leftarrow c_{n-1} + e$

Multiplikation

Lemma 1.4: Wir können eine Zahl der Länge n mit einer Ziffer in $2n+1$ elementaren arithmetischen Operationen multiplizieren.

Sei $p_j = a \cdot b_j$ mit $p_j = (p_{j,n} \ldots p_{j,0})$.

Dann müssen wir noch

$$p = \sum_{j=0}^{n-1} p_j \cdot B^j$$

berechnen.

Multiplikation

Bildlich: $p_{0,n} \cdots p_{0,2}\ p_{0,1}\ p_{0,0}$

$+ \quad p_{1,n}\ p_{1,n-1} \cdots p_{1,1}\ p_{1,0}$

$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ \quad p_{n-1,n} \cdots\cdot\ p_{n-1,1}\ p_{n-1,0}$

$p_{2n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ p_2\ \ p_1\ \ p_0$

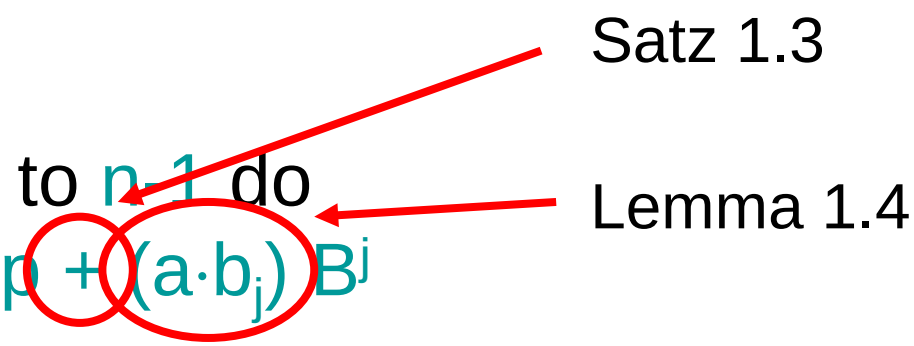
Multiplikation

Algorithmus:

$p \leftarrow 0$

for $j \leftarrow 0$ to $n-1$ do

$p \leftarrow p + (a \cdot b_j) B^j$



Anzahl Elementaroperationen maximal

- $2n$ wegen Satz 1.3, insgesamt $2n^2$
- $2n+1$ wegen Lemma 1.4, insgesamt $n(2n+1)$

Also insgesamt max. $4n^2+n$ Elementaroperationen

Multiplikation

Satz 1.5: Die Schulmethode multipliziert zwei Zahlen der Länge n mit höchstens $4n^2+n$ primitiven Operationen.

Können wir besser werden?

Multiplikation

Rekursive Version der Schulmethode:

Gegeben: zwei n-stellige Zahlen a, b zur Basis B, n gerade

Sei $a=a_1 \cdot B^k + a_0$ und $b=b_1 \cdot B^k + b_0$ mit $k=n/2$

Dann gilt:

$$a \cdot b = (a_1 \cdot B^k + a_0) \cdot (b_1 \cdot B^k + b_0)$$
$$= a_1 \cdot b_1 B^{2k} + (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) B^k + a_0 \cdot b_0$$

4 rekursive Aufrufe zur Multiplikation $n/2$-stelliger Zahlen

Multiplikation

Annahme: $|a|=|b|=n=2^c$ für ein $c \in \mathbb{N}$

Algorithmus Produkt(a,b):

if $|a|=|b|=1$ then return $a \cdot b$

else

$k \leftarrow |a|/2$

return Produkt(a_1,b_1) $\cdot B^{2k}$ + (Produkt(a_1,b_0) + Produkt(a_0,b_1))$\cdot B^k$ + Produkt(a_0,b_0)

return - Anweisung

if … then … else … - Anweisung

Multiplikation

Anzahl Elementaroperationen ($\cdot$, +):

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 4T(n/2)+3(2n) & n=2^c,\ c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $T(n) = 7n^2 - 6n$ für alle $n=2^c,\ c \in \mathbb{N}_0$

Beweis: durch Induktion

Multiplikation

Karatsubas Idee:

$$a \cdot b = (a_1 \cdot B^k + a_0) \cdot (b_1 \cdot B^k + b_0)$$
$$= a_1 b_1 \cdot B^{2k} + (a_1 b_0 + a_0 b_1) \cdot B^k + a_0 b_0$$
$$= a_1 b_1 B^{2k} + ((a_1 + a_0)(b_1 + b_0) - (a_1 b_1 + a_0 b_0)) B^k + a_0 b_0$$

Nur noch drei rekursive Aufrufe für

$a_1 b_1$, $a_0 b_0$, $(a_1 + a_0)(b_1 + b_0)$

Multiplikation

Algorithmus Karatsuba(a,b):

if |a|=|b|=1 then return a·b

else

$k \leftarrow |a|/2$

$p_1 \leftarrow$ Karatsuba(a_1,b_1)

$p_2 \leftarrow$ Karatsuba(a_1+a_0,b_1+b_0)

$p_3 \leftarrow$ Karatsuba(a_0,b_0)

return $p_1 \cdot B^{2k} + (p_2-(p_1+p_3)) \cdot B^k + p_3$

Multiplikation

Anzahl Elementaroperationen:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 3T(n/2+1)+6(2n) & n>1 \end{cases}$$

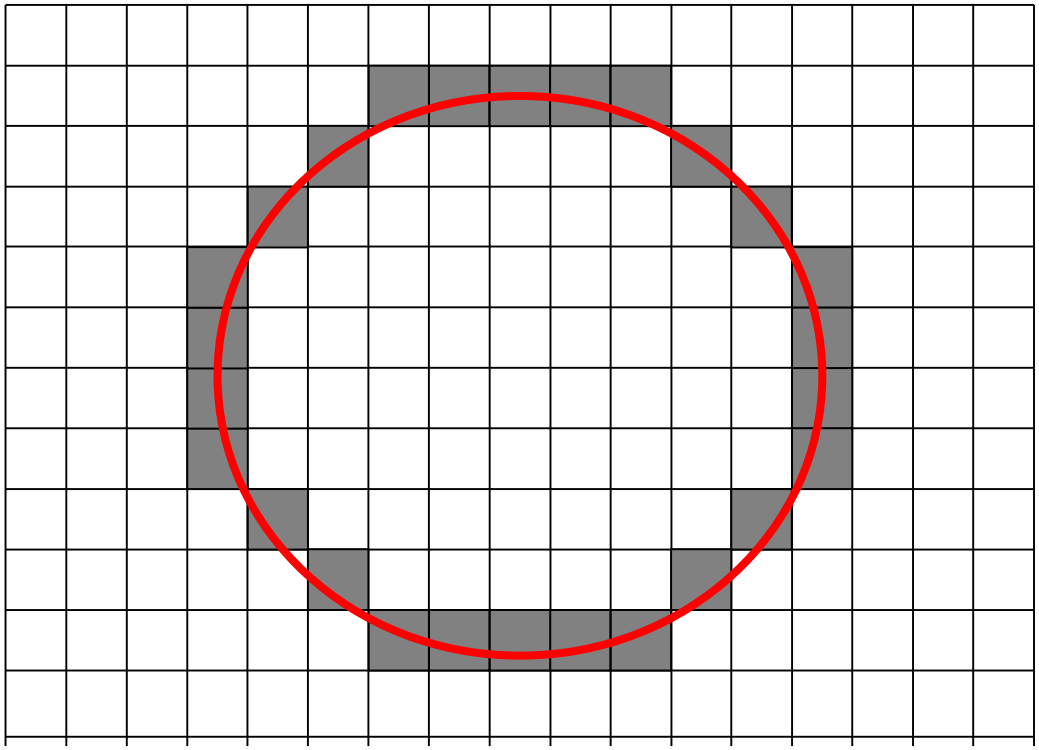
Daraus ergibt sich $T(n) \sim n^{\log 3} = n^{1,58...}$

Problem: Karatsuba erst für $n>1.000.000$ besser als Schulmethode

Bester Algo für Multiplikation: $O(n \log n \log\log n)$

Kreiszeichnen

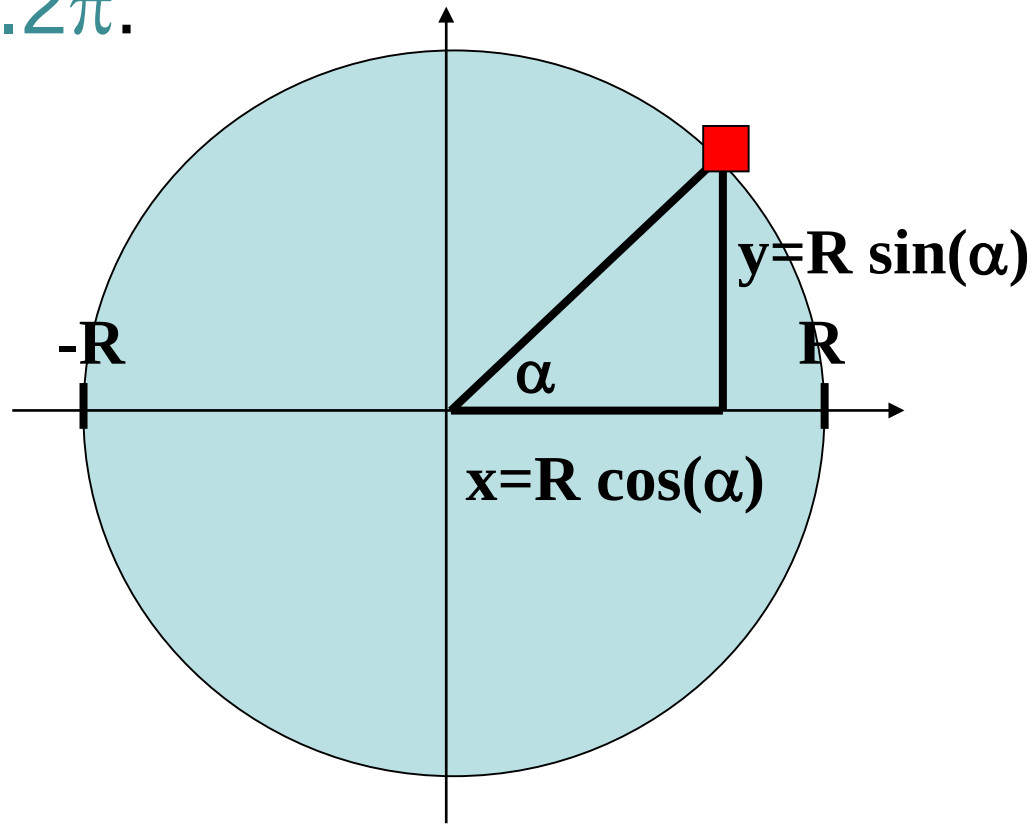
Wie zeichne ich schnell Kreise im Computer?



Kreiszeichnen

Naiver Ansatz: verwende sin und cos

Für $\alpha=0...2\pi$:



Kreiszeichnen

plot(x,y): setze Punkt bei Position (x,y)

Algorithmus Kreis1:

for $i \leftarrow 0$ to $n-1$ do
  plot($R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot i/n)$, $R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot i/n)$)

Kreisumfang: $U = 2\pi R$. Bei Pixelbreite von 1 Längeneinheit reicht dann $n = 7R$.

Problem: sin, cos, ·, / teuer!

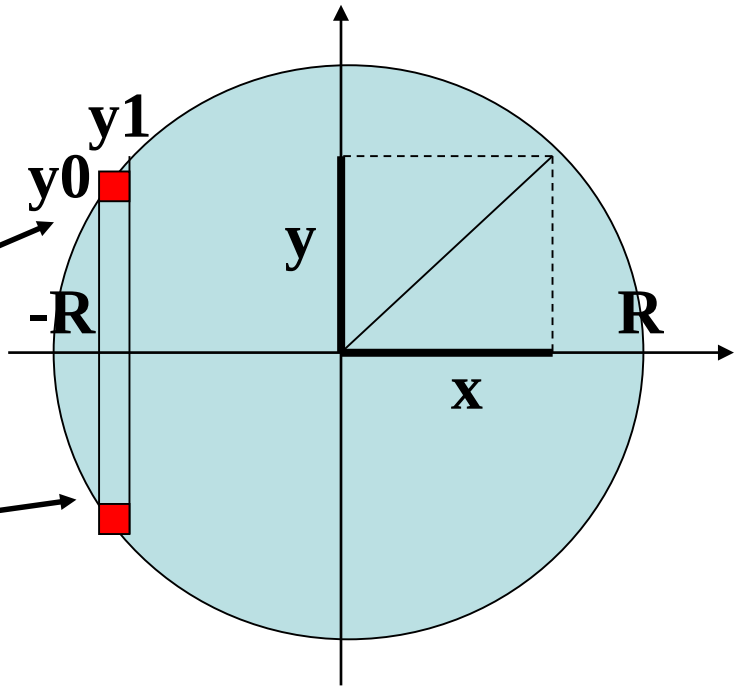
Kreiszeichnen

Besserer Ansatz:

$x^2+y^2=R^2$, also $y=+/-\sqrt{R^2-x^2}$

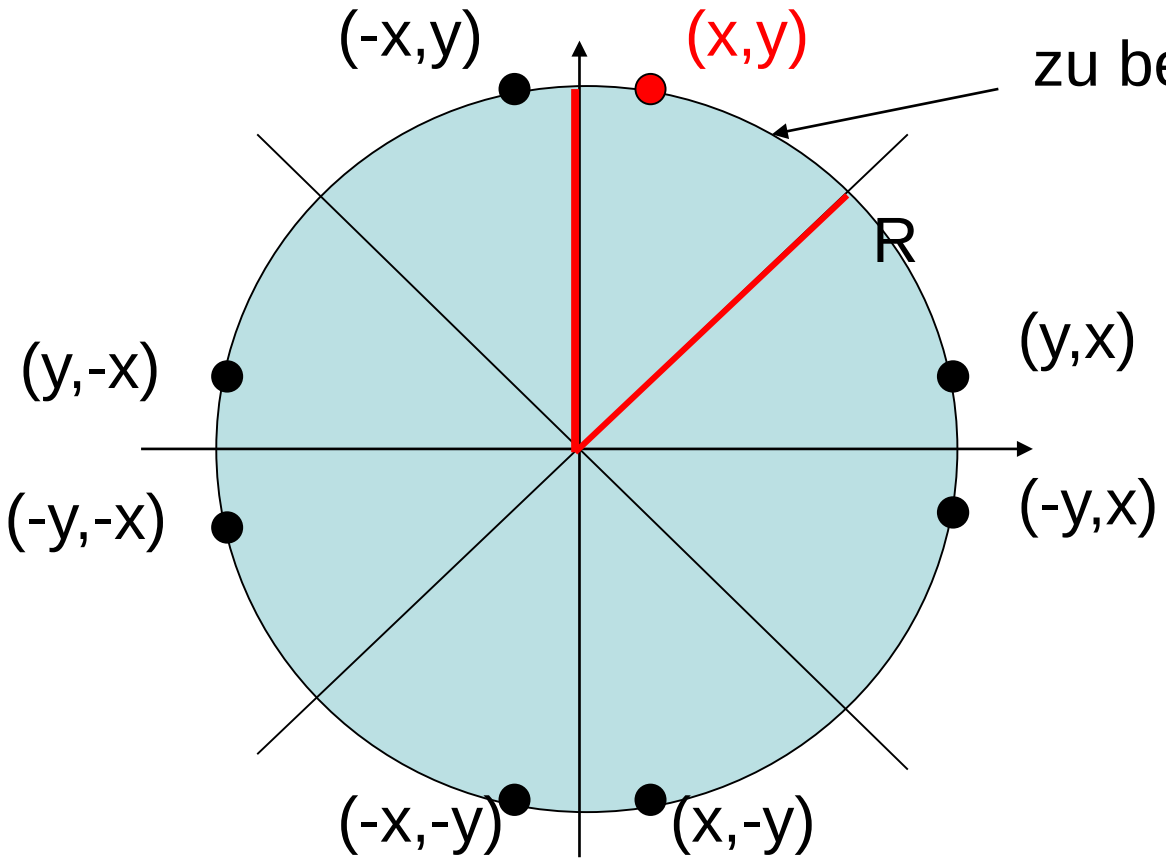
Algorithmus Kreis2:

```
y0 ← 0
for x ← -R to R do
    y1 ← sqrt(R·R-x·x)
    for y←y0 to y1 do
        plot(x,y); plot(x,-y)
    y0←y1
```



Kreiszeichnen

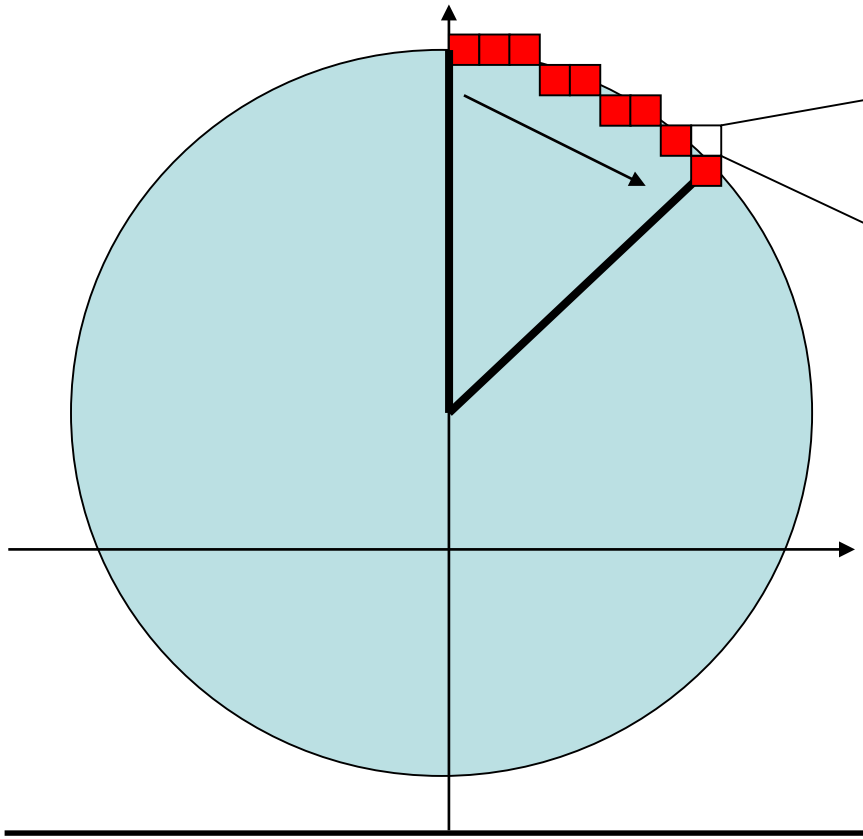
Noch besser: Ausnutzung von Spiegelungen



Kreiszeichnen

Aber: Algo verwendet immer noch Wurzel

Kommen wir mit ·,+,- aus?



- innerhalb von Kreis?

  ja: x←x+1

  nein: x←x+1; y←y-1

zeichne nur ■ mit ● innerhalb

Kreiszeichnen

- Mittelpunkt des ersten ■ sei (x,y)=(0,R)
- Position seines •: (0,R-1/2) (1x1-Quadrat)
- Test, ob (x,y) innerhalb Kreis:
  teste, ob $F(x,y)=x^2+y^2-R^2 < 0$ ist
- Also Test, ob ■ mit Mittelpunkt (1,R) noch innerhalb von Kreis ist: F(1,R-1/2)<0?
- Es gilt: $F(x+1,y) = F(x,y)+2x+1$
  $F(x+1,y-1) = F(x,y)+2x-2y+2$

Bresenham Algorithmus

```
(x,y)←(0,R)
F←1-R
{eigentlich F(1,R-1/2)=5/4-R, aber 1-R gleiche Ausgabe}
plot(0,R); plot(R,0); plot(0,-R); plot(-R,0)
while (x<y) do
    if (F<0) then        { □ bei (x+1,y) hat ● innerhalb Kreis?}
        F←F+2·x+1     { ja: zu Punkt (x+1,y) }
        x←x+1
    else
        F←F+2·x-2·y+2   { nein: zu Punkt (x+1,y-1) }
        x←x+1
        y←y-1
    plot(x,y); plot(y,x); plot(-x,y); plot(y,-x)
    plot(x,-y); plot(-y,x); plot(-x,-y); plot(-y,-x)
```

Bresenham Algorithmus

```
(x,y)←(0,R)
F←1-R
{eigentlich F(1,R-1/2)=5/4-R, aber 1-R gleiche Ausgabe}
plot(0,R); plot(R
while (x<y) do
    if (F<0) then        { □ bei (x+1,y) hat ● innerhalb Kreis?}
        F←F+2·x+1     { ja: zu Punkt (x+1,y) }
        x←x+1
    else
        F←F+2·x-2·y+2   { nein: zu Punkt (x+1,y-1) }
        x←x+1
        y←y-1
    plot(x,y); plot(y,x); plot(-x,y); plot(y,-x)
    plot(x,-y); plot(-y,x); plot(-x,-y); plot(-y,-x)
```

while … do … - Schleife

Besserer Bresenham Algorithmus

```
(x,y)←(0,R)
F←1-R
plot(0,R); plot(R,0); plot(0,-R); plot(-R,0)
while (x<y) do
    x←x+1
    if (F<0) then        { □ bei (x+1,y) hat ● innerhalb Kreis?}
        F←F+2·x-1            { ja: zu Punkt (x+1,y) }
    else
        F←F+2·(x-y)          { nein: zu Punkt (x+1,y-1) }
        y←y-1
    plot(x,y); plot(y,x); plot(-x,y); plot(y,-x)
    plot(x,-y); plot(-y,x); plot(-x,-y); plot(-y,-x)
```

2· : in Maschinencode sehr schnell (Linksshift der Bits)

Zusammenfassung

Beispiele:

- Arithmetik auf großen Zahlen
  Beispiel für asymptotische Verbesserung
  (klassische Algorithmik)
- Kreisberechnung
  Beispiel für Verbesserung der Konstanten
  (Algorithm Engineering)

Ideal: Anwendung beider Strategien