Doppelt verkettete Listen

Datenstruktur Liste:

- Platzbedarf $\Theta(n)$
- Laufzeit Suche: $\Theta(n)$
- Laufzeit Einfügen/Löschen: $\Theta(1)$

Vorteile:

- Schnelles Einfügen/Löschen
- O(n) Speicherbedarf

Nachteile:

- Hohe Laufzeit für Suche

11: Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume

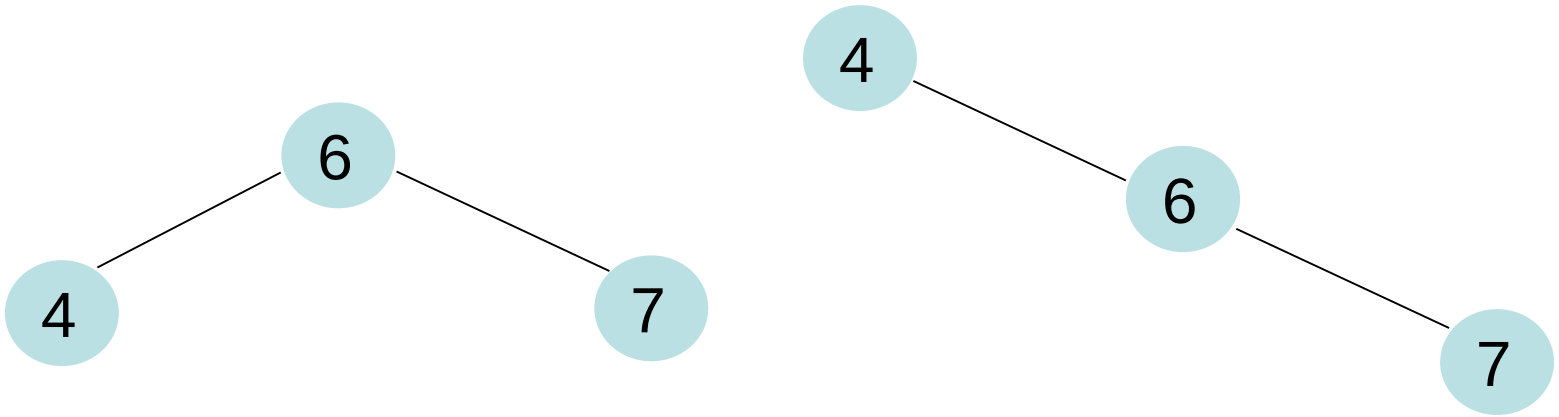
- Verwende Binärbaum
- Speichere Schlüssel „geordnet“

Binäre Suchbaumeigenschaft:

- Sei x Knoten im binären Suchbaum
- Ist y Knoten im linken Unterbaum von x, dann gilt $key[y] \leq key[x]$
- Ist y Knoten im rechten Unterbaum von x, dann gilt $key[y] \geq key[x]$

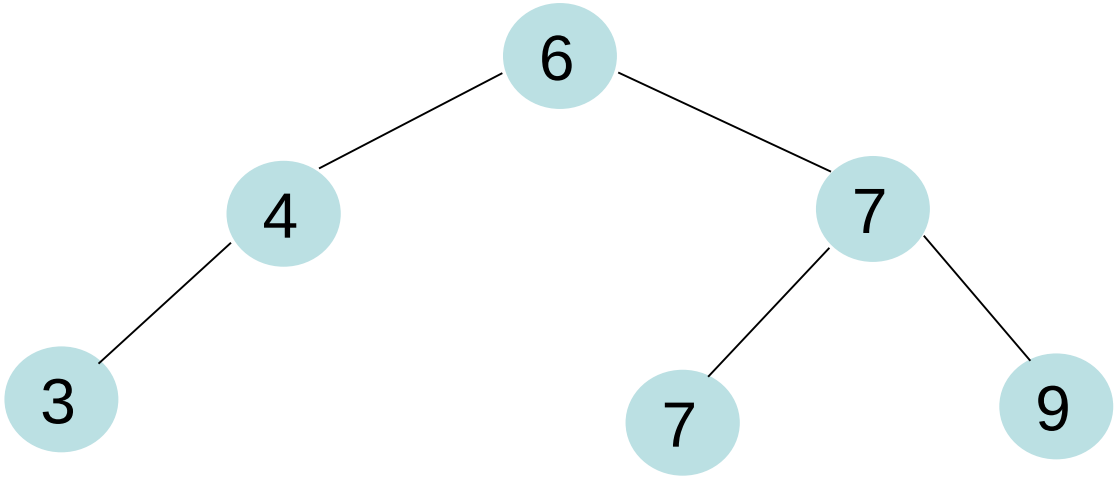
Unterschiedliche Suchbäume

- Beispiel: Schlüsselmenge 4,6,7



Sortierte Ausgabe aller Schlüssel

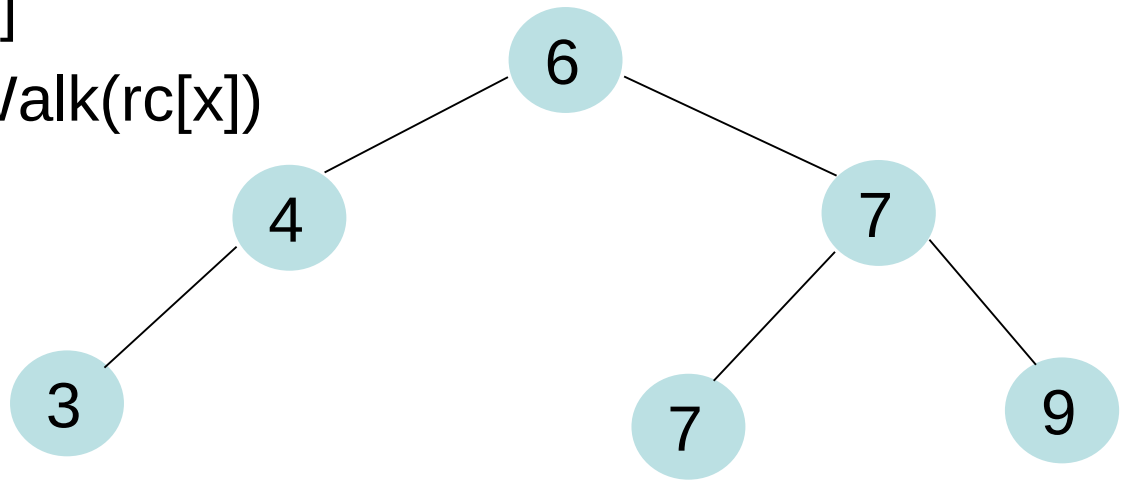
- Gegeben binärer Suchbaum
- Wie kann man alle Schlüssel aufsteigend sortiert in $\Theta(n)$ Zeit ausgeben?



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

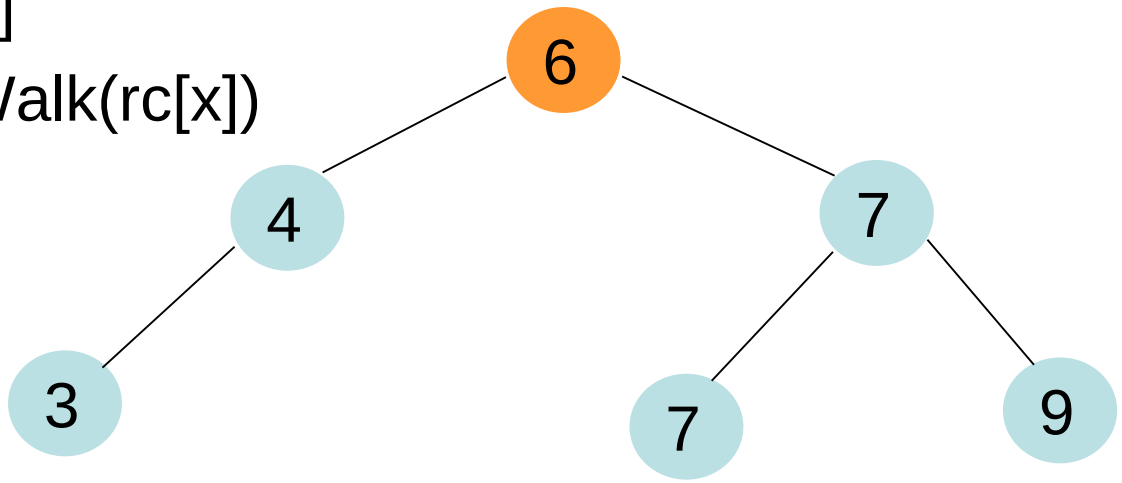


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

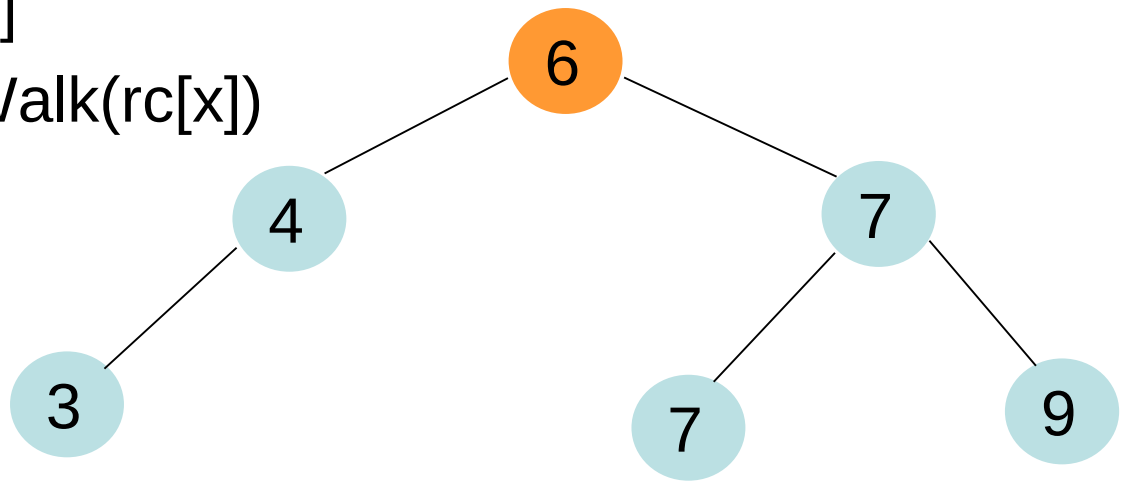
Aufruf über
Inorder-Tree-Walk(root[T])



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

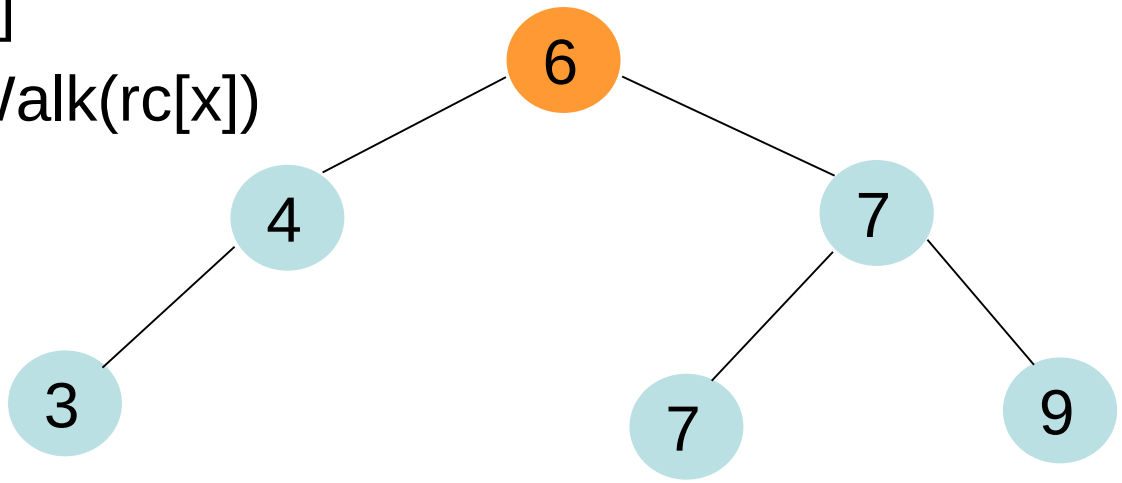
1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

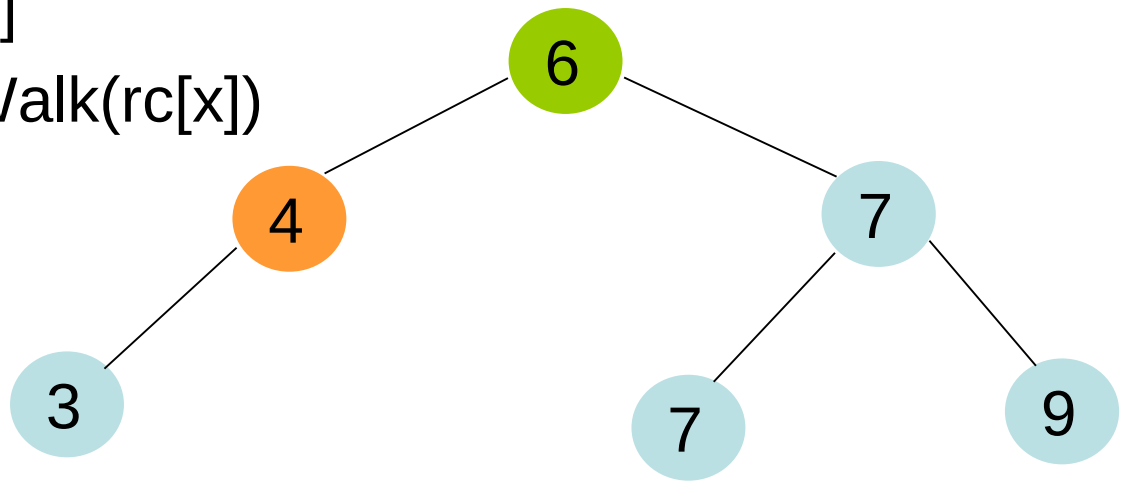
1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

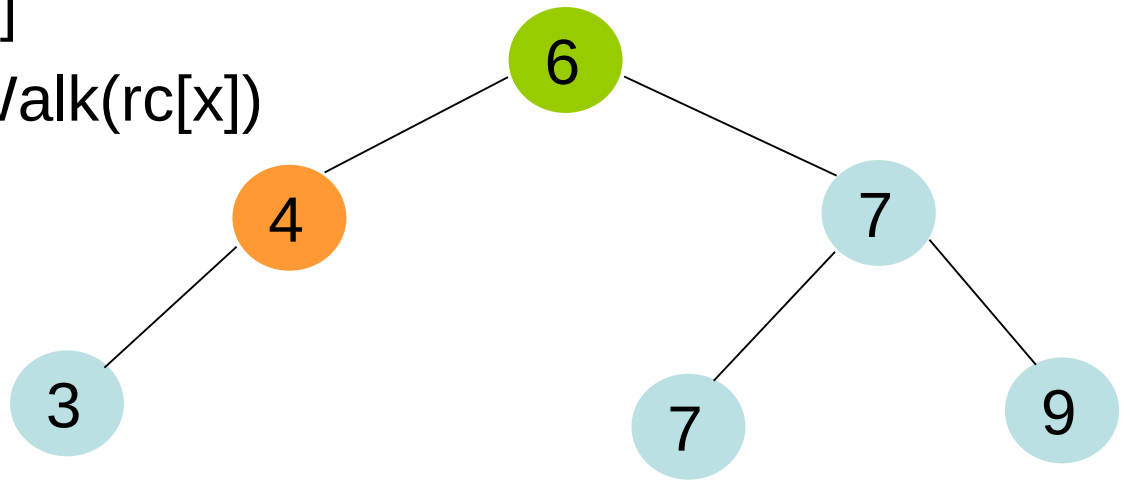
1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

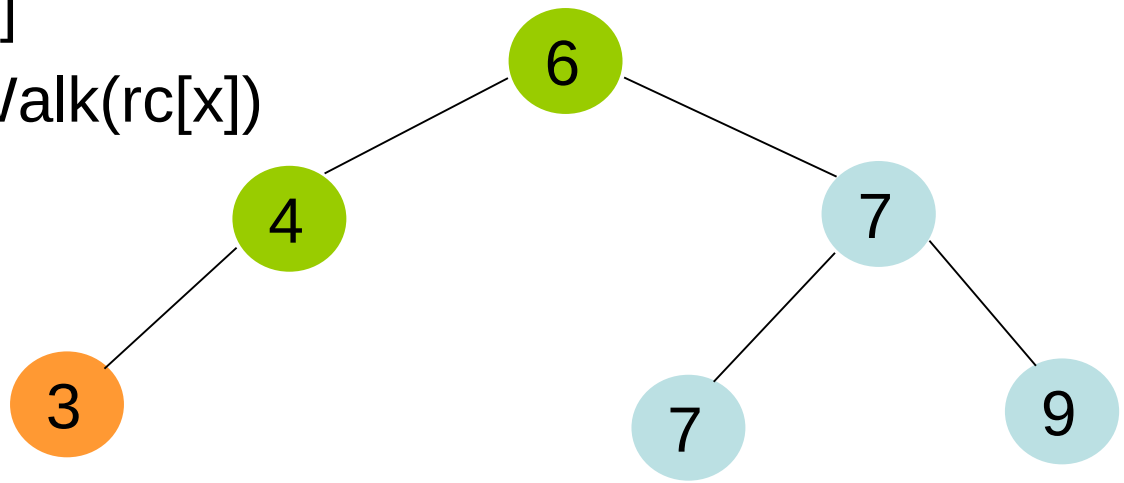
1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

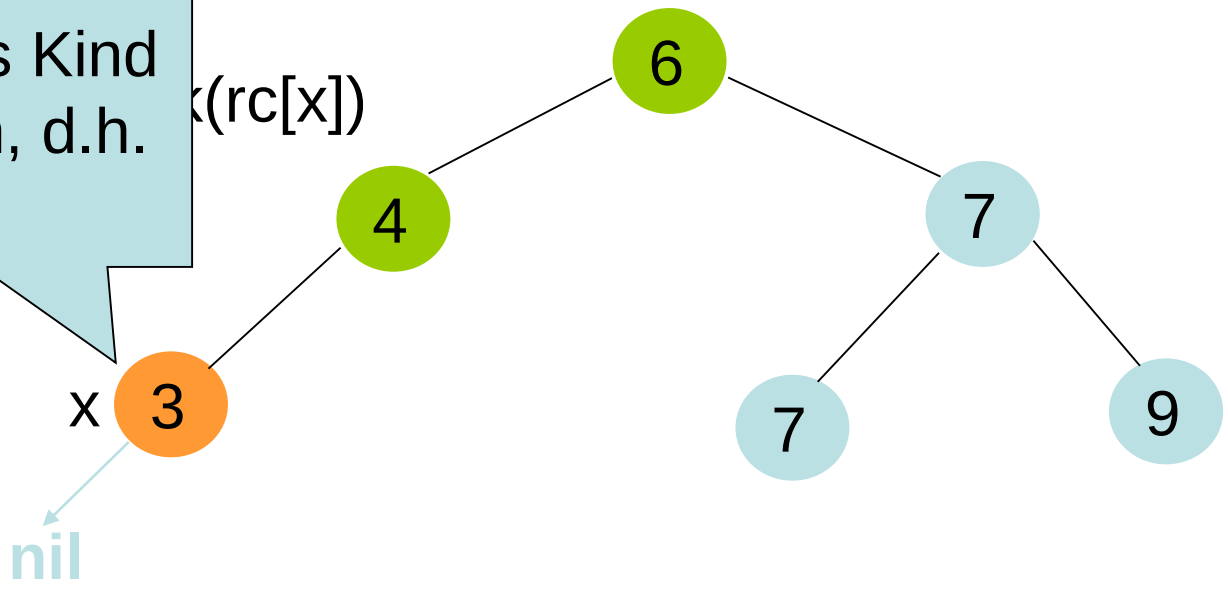


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3.
4. (rc[x])

Kein linkes Kind vorhanden, d.h. lc[x]=**nil**

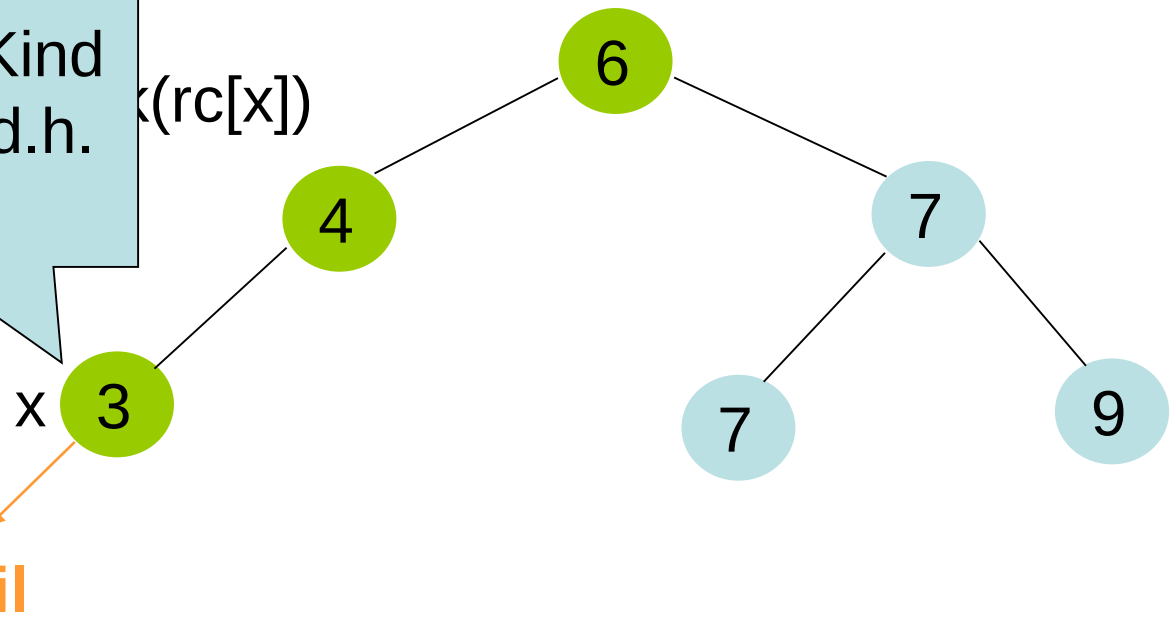


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3.
4. (rc[x])

Kein linkes Kind vorhanden, d.h. lc[x]=**nil**

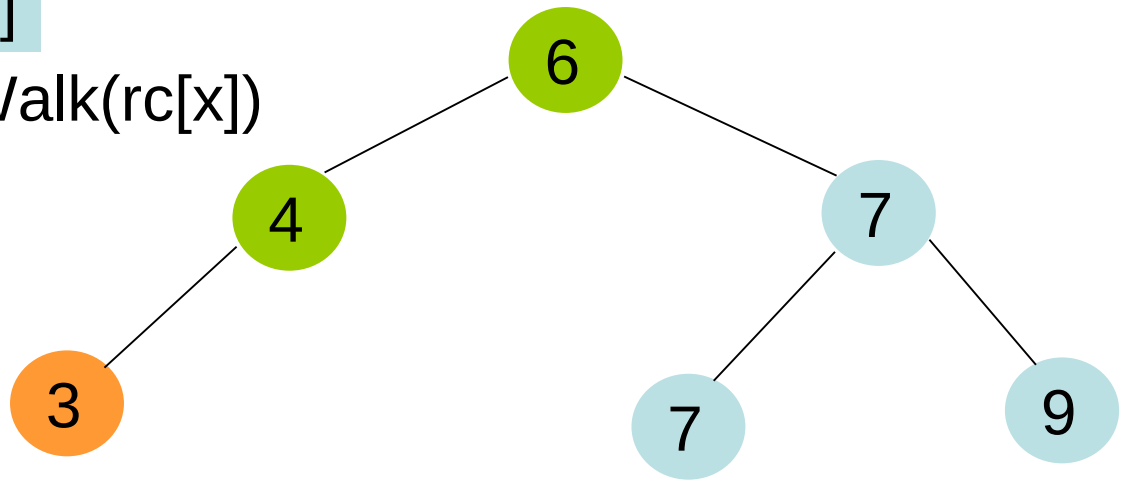


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3



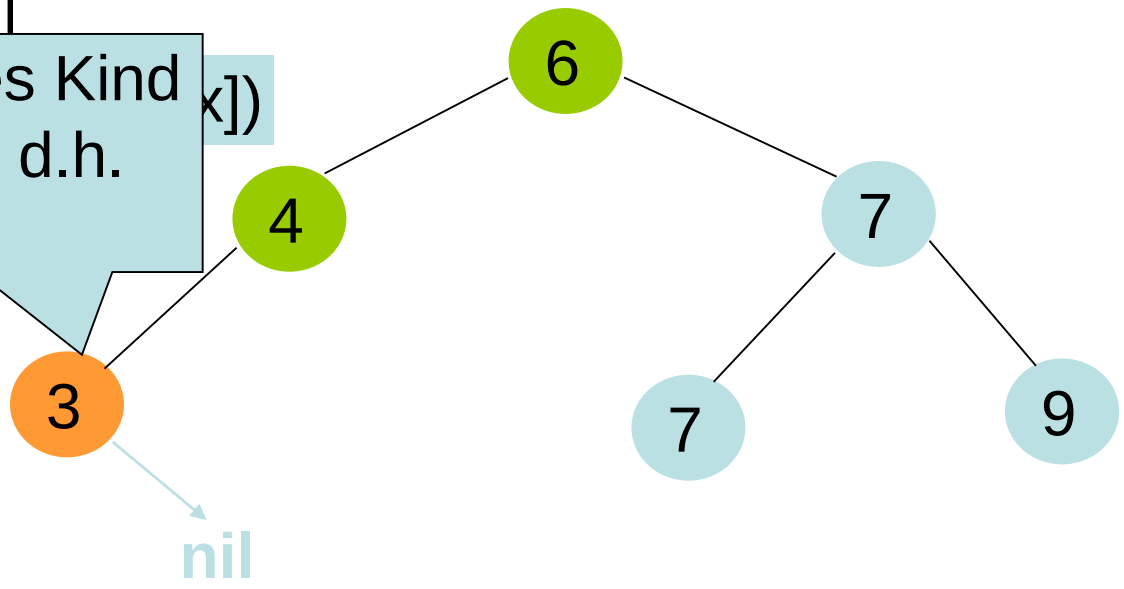
Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inc x])

Ausgabe:
3

Kein rechtes Kind vorhanden, d.h. rc[x]=**nil**



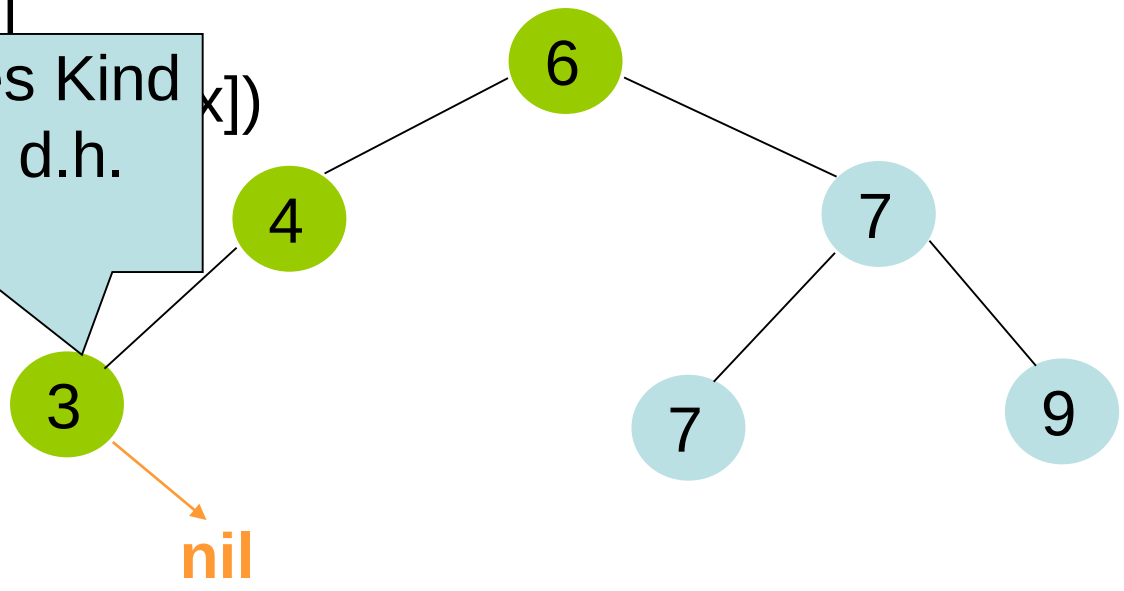
Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inc x])

Ausgabe:
3

Kein rechtes Kind vorhanden, d.h. rc[x]=**nil**

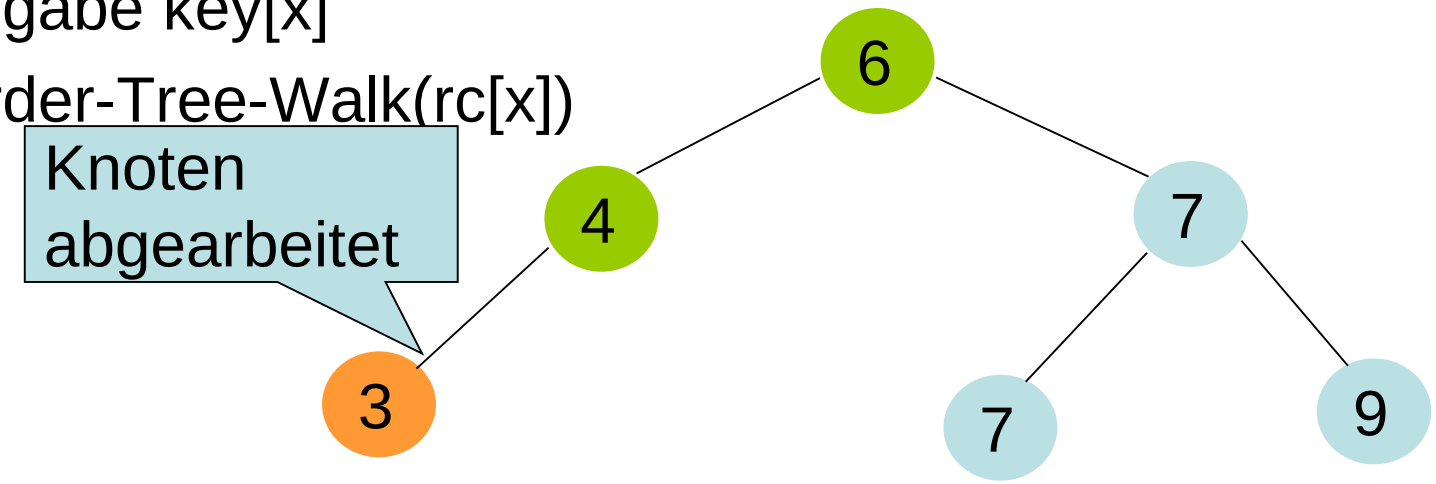


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3

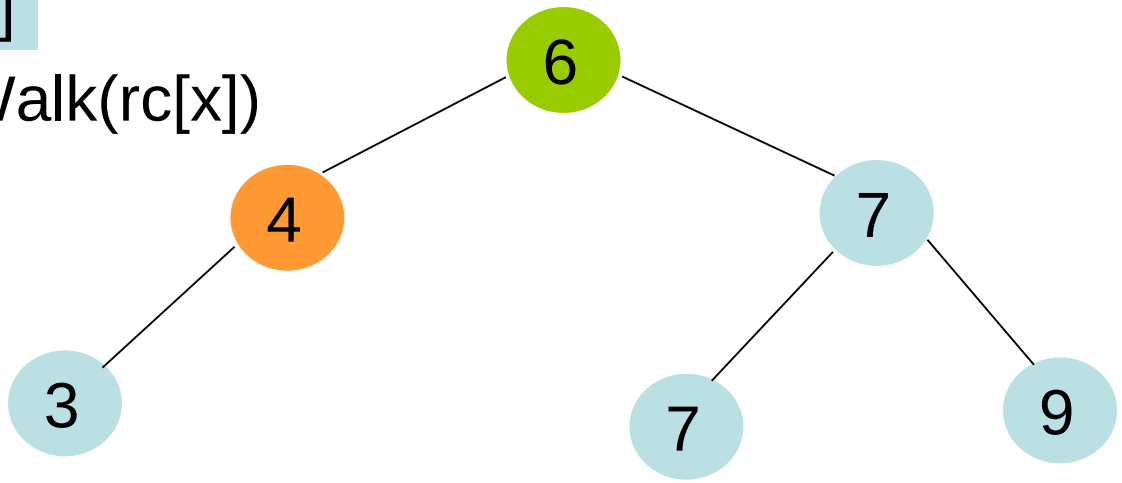


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4

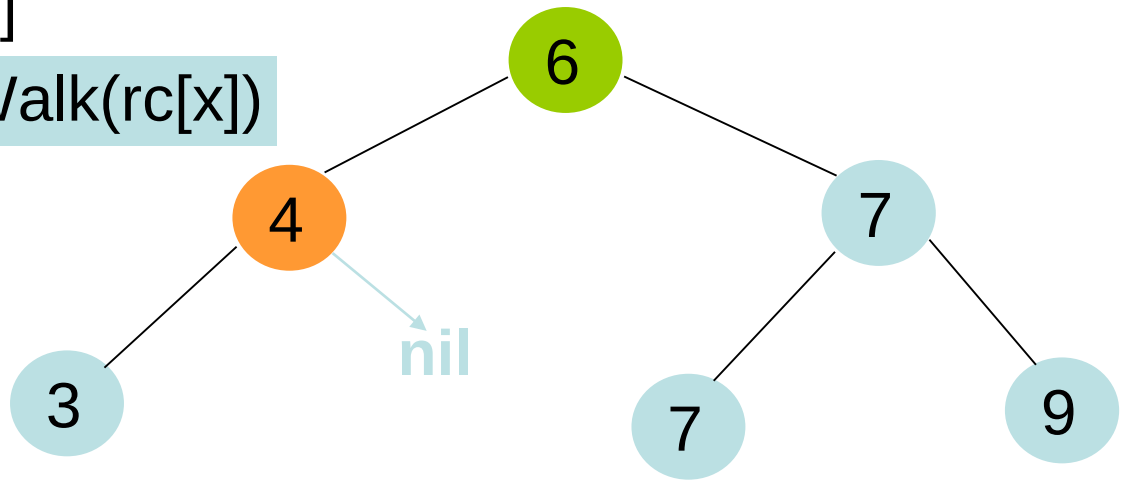


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4

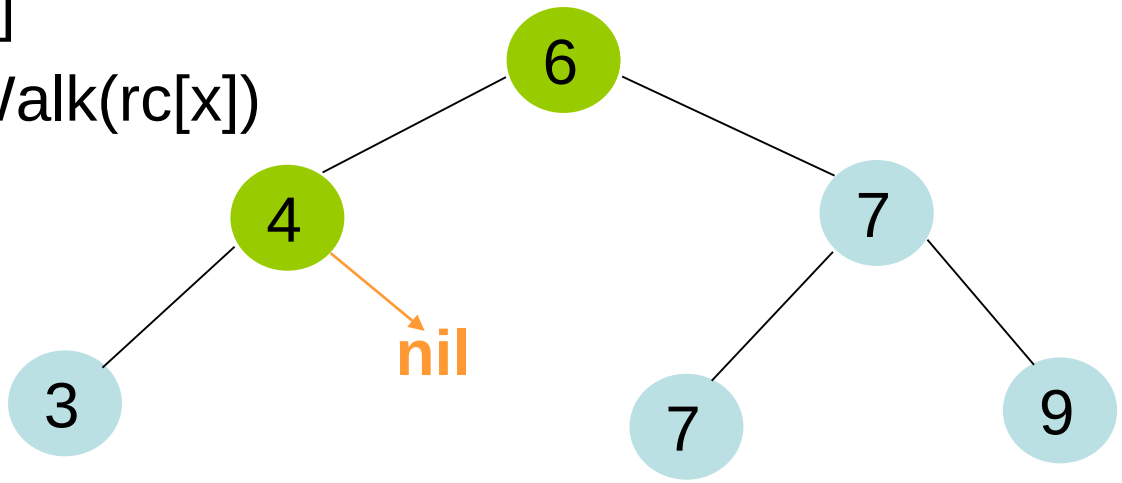


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4

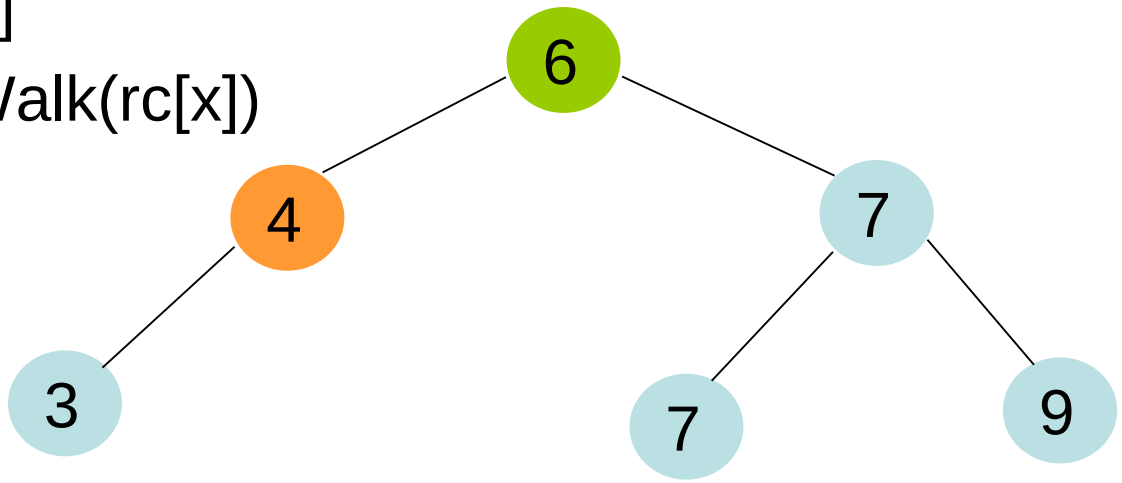


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4

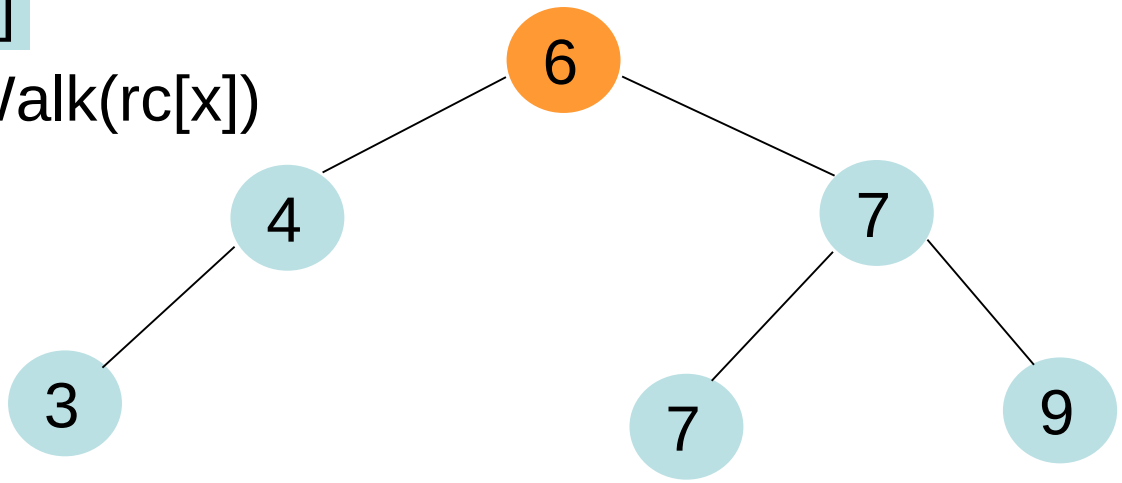


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

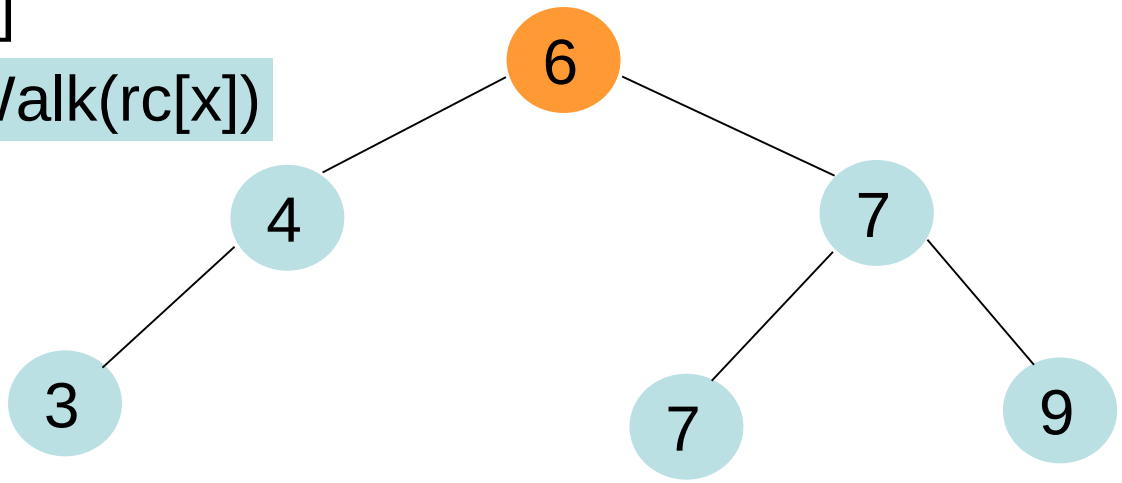


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

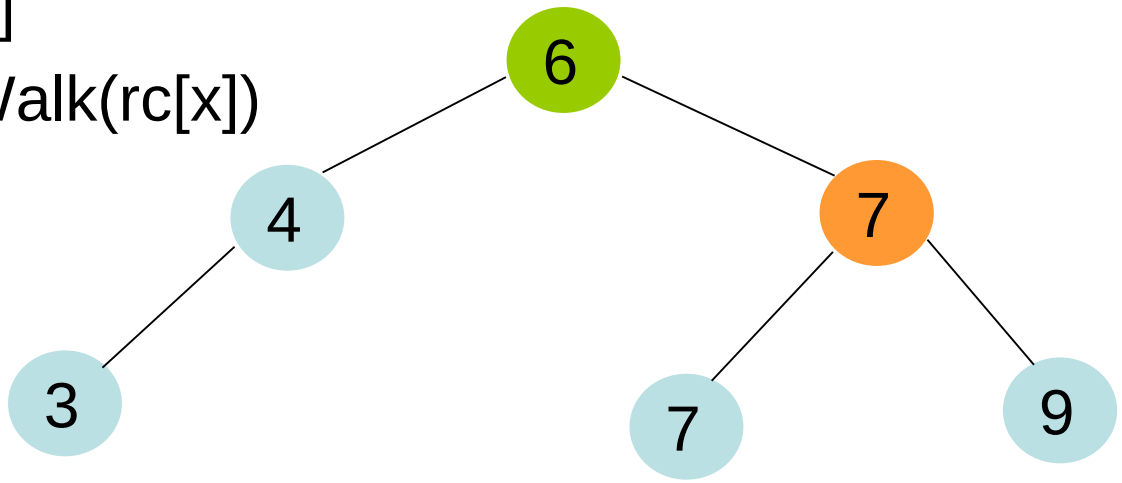


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

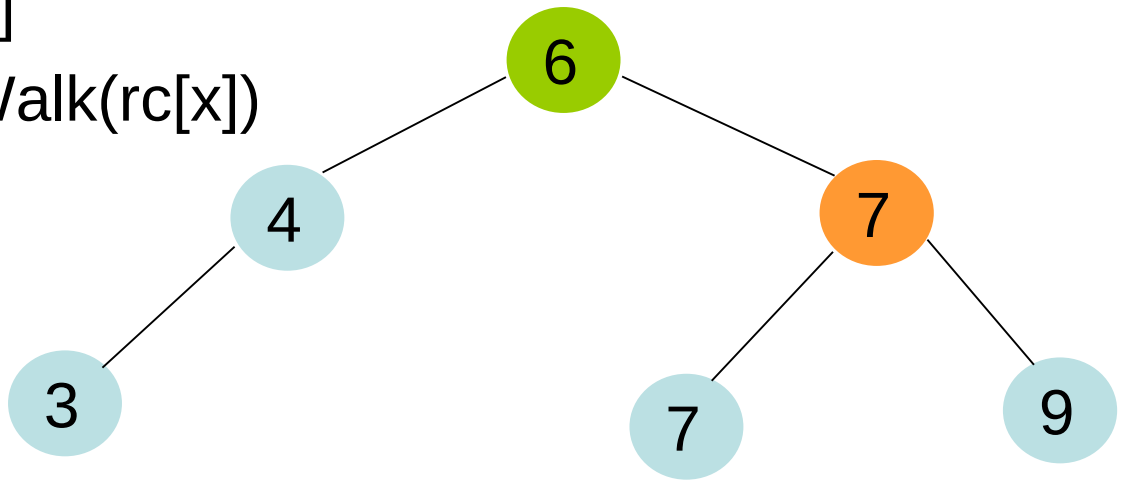


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

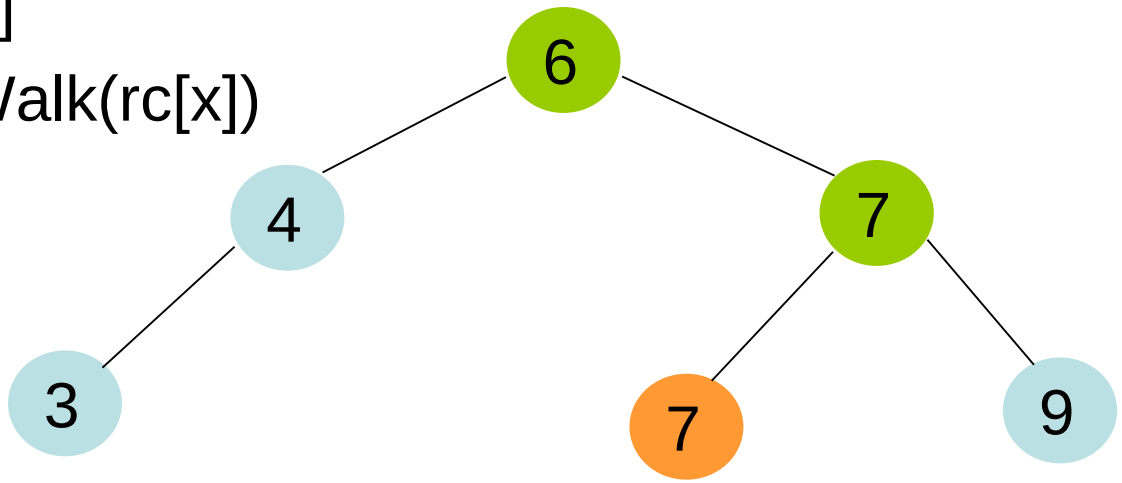


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

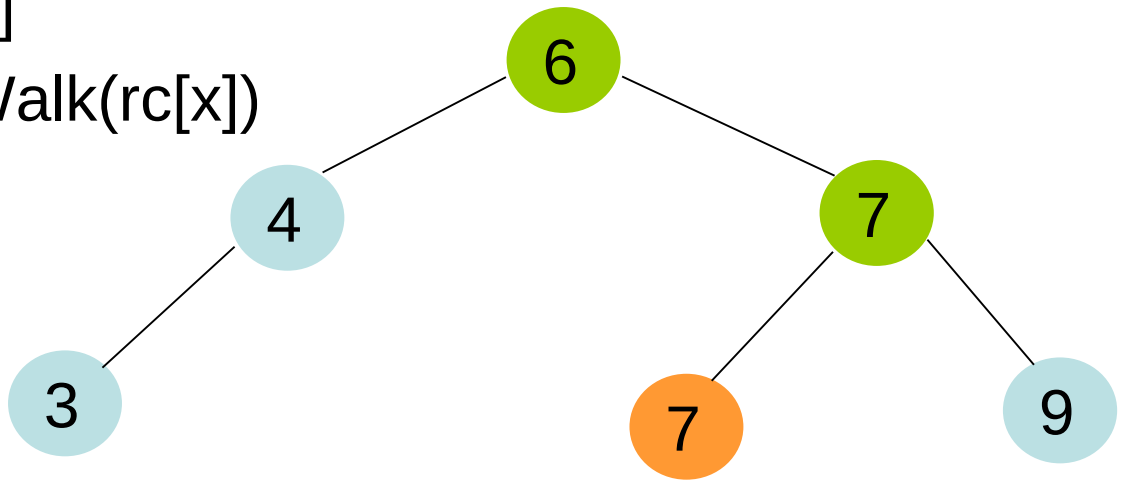


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

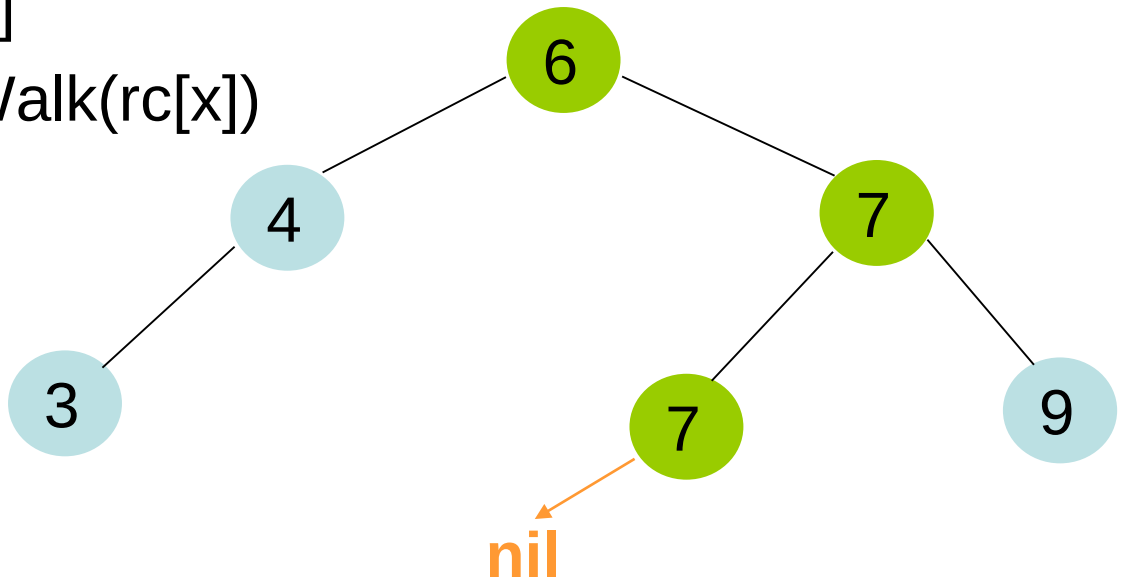


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

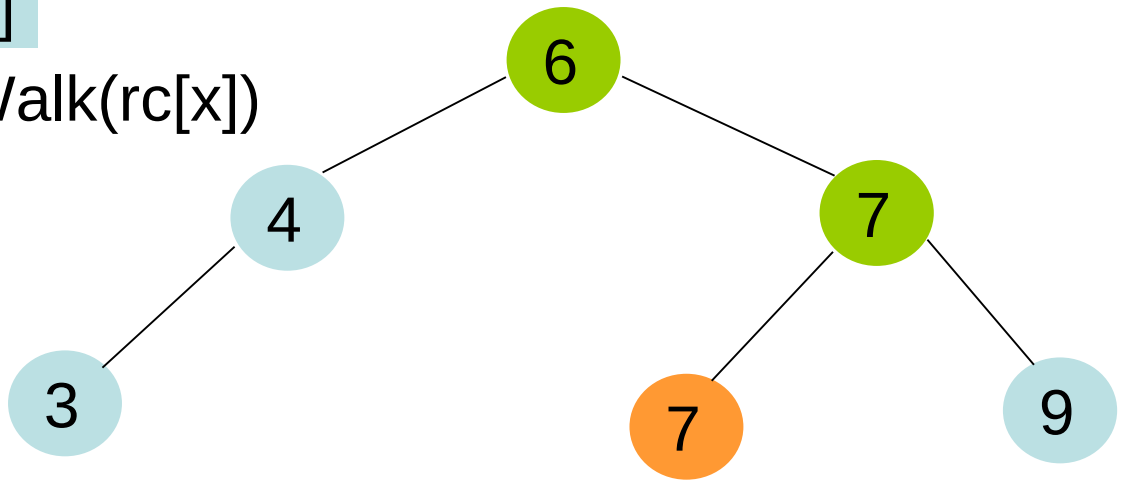


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7

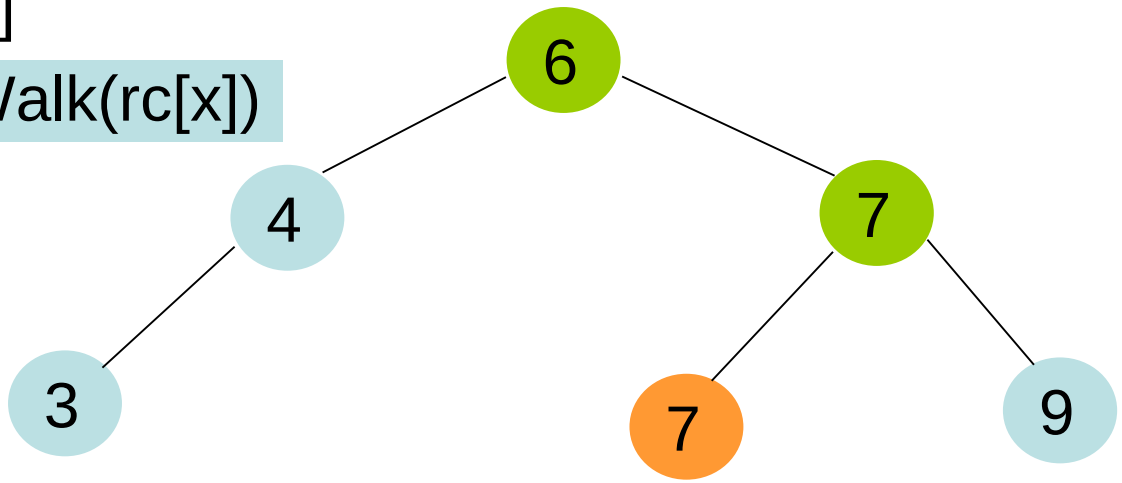


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7

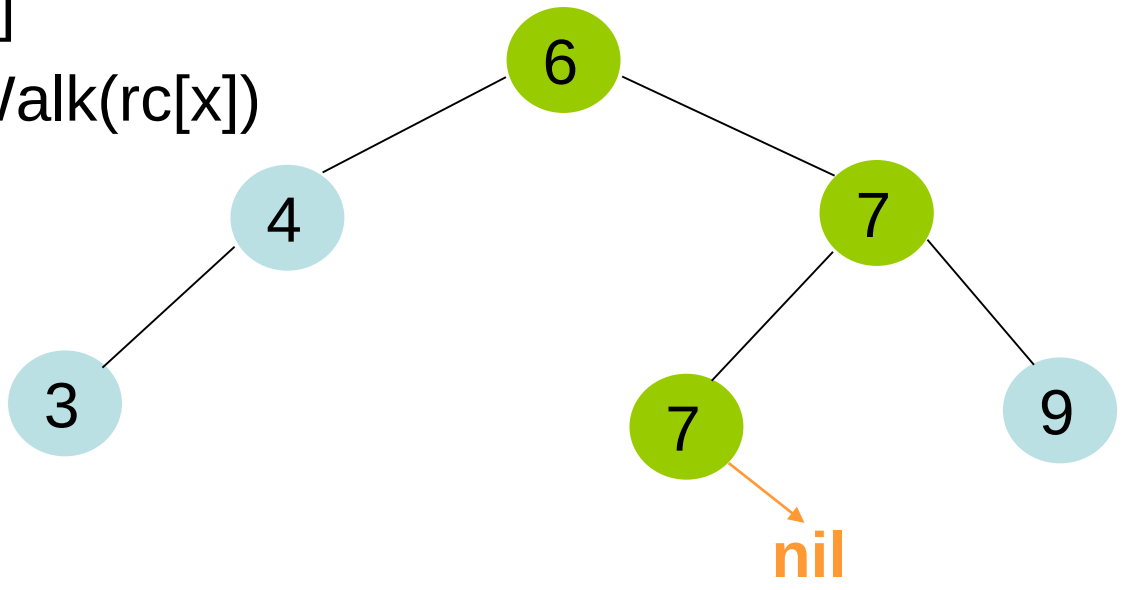


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6

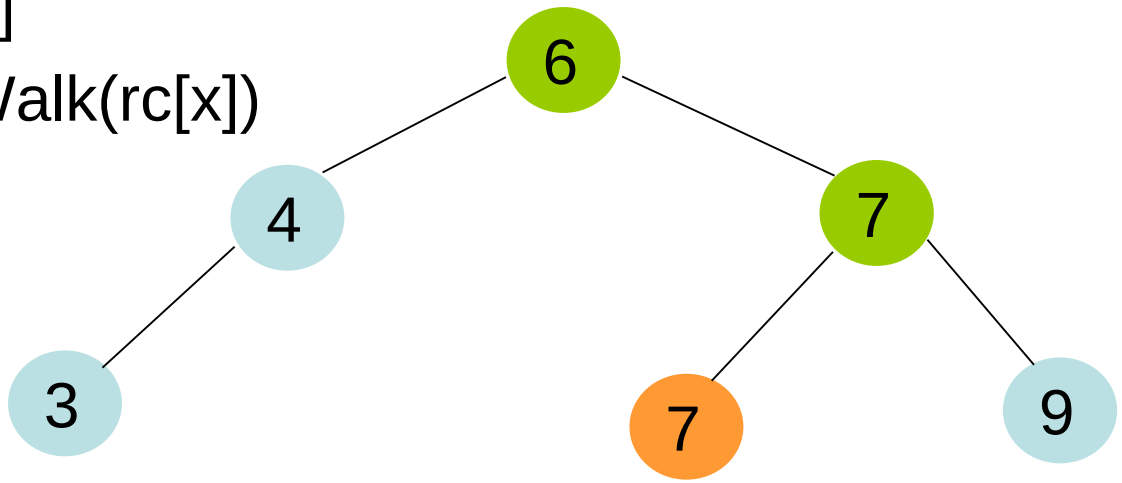


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7

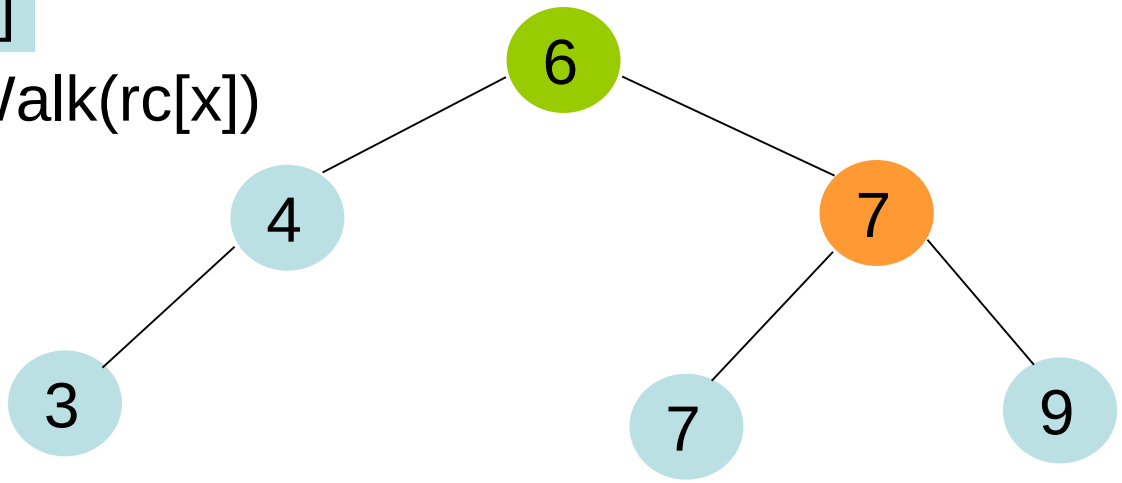


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

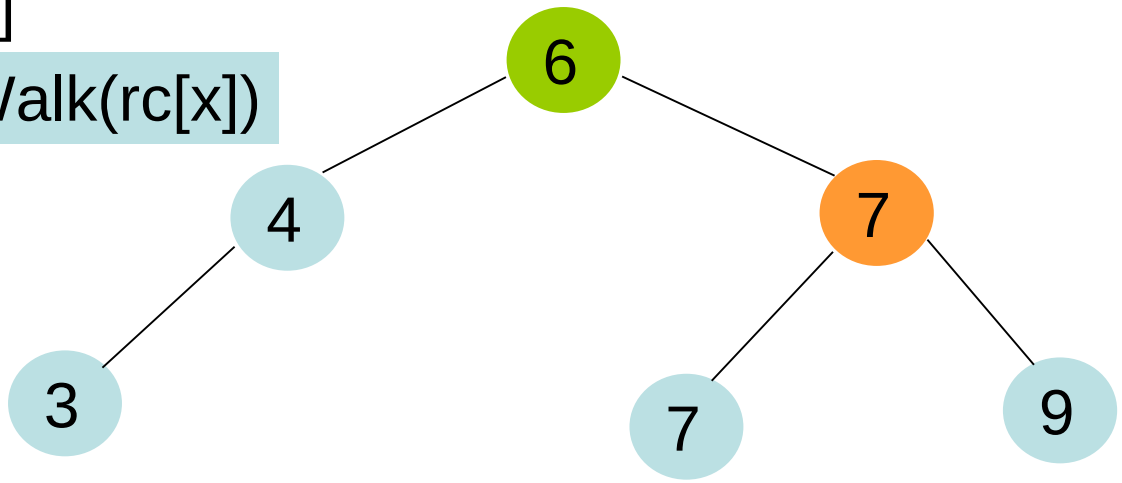


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

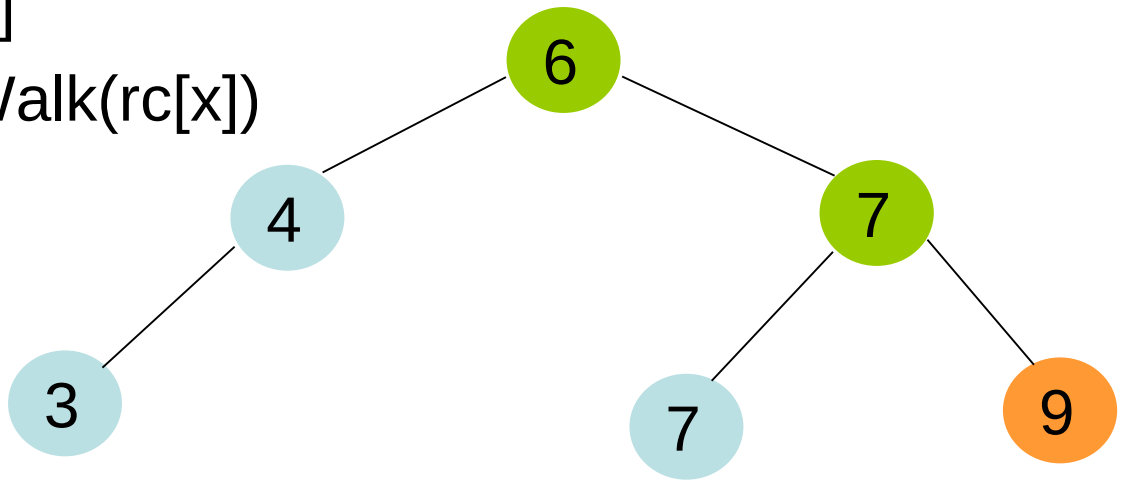


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

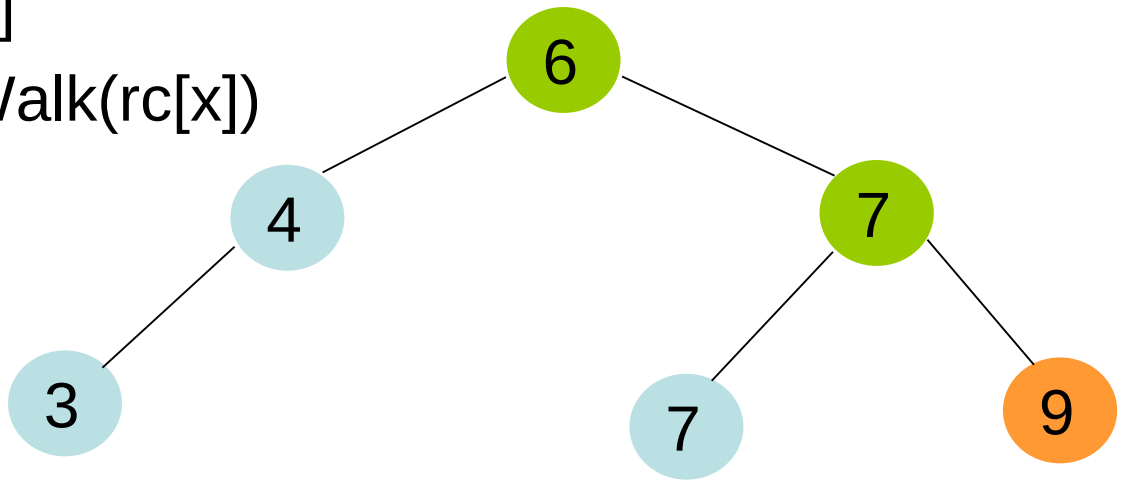


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

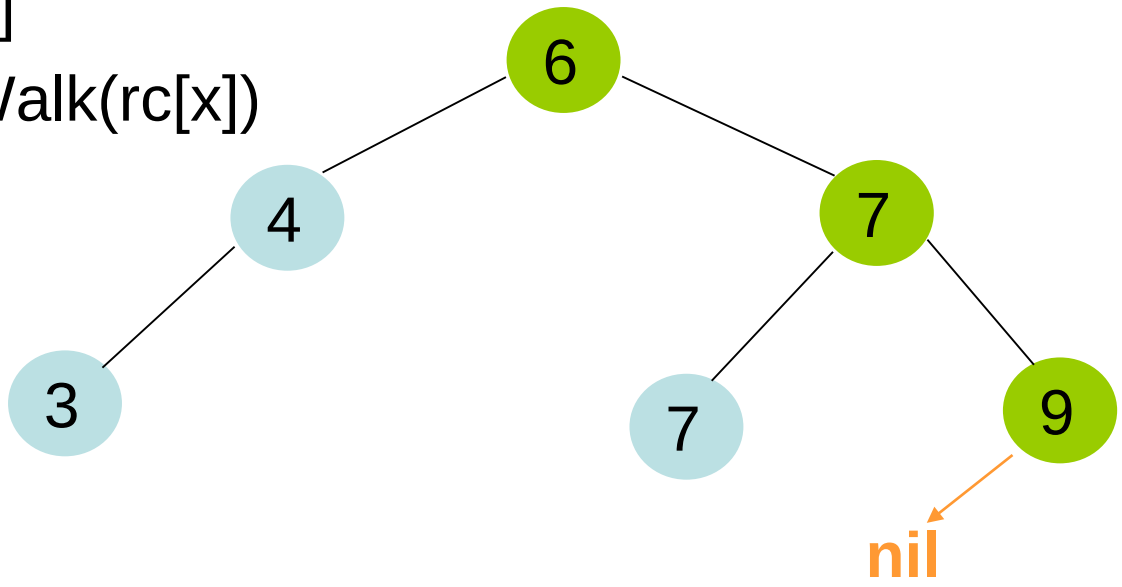


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if x≠nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

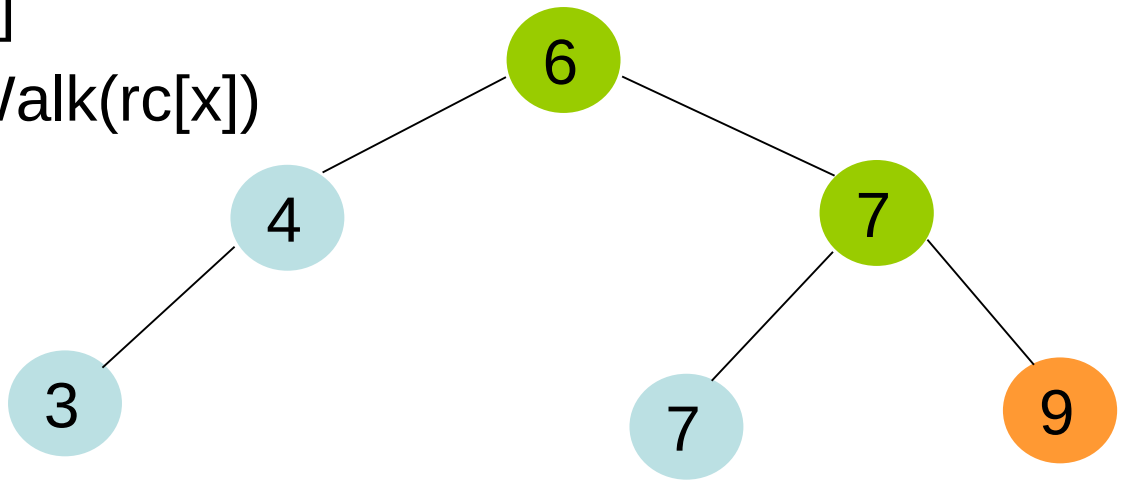


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7

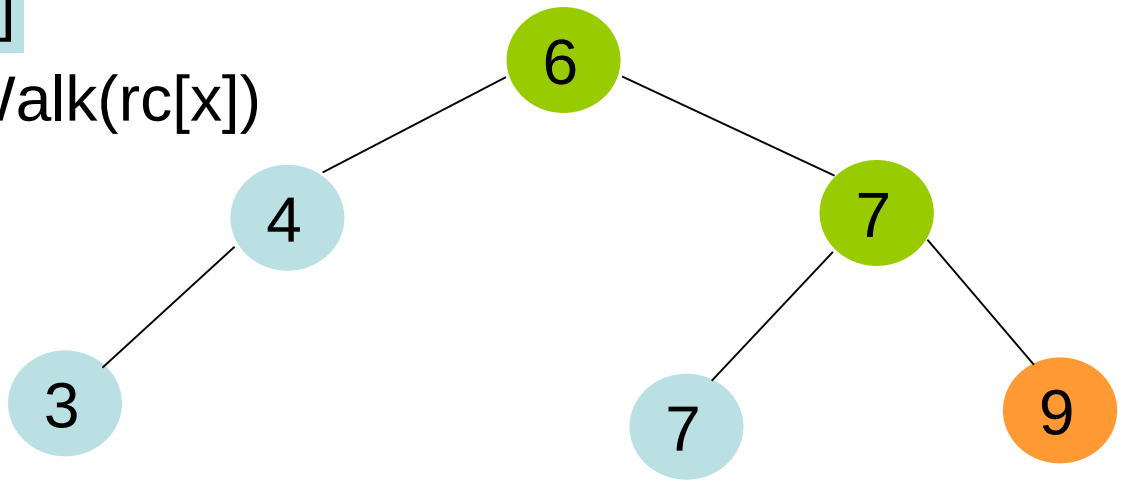


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

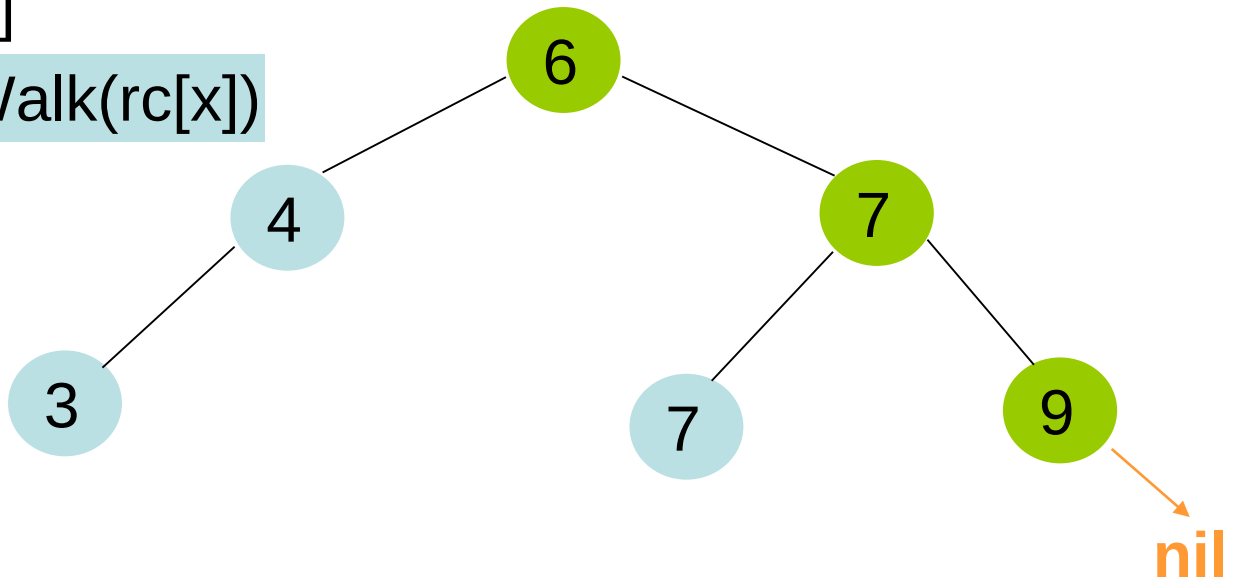


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

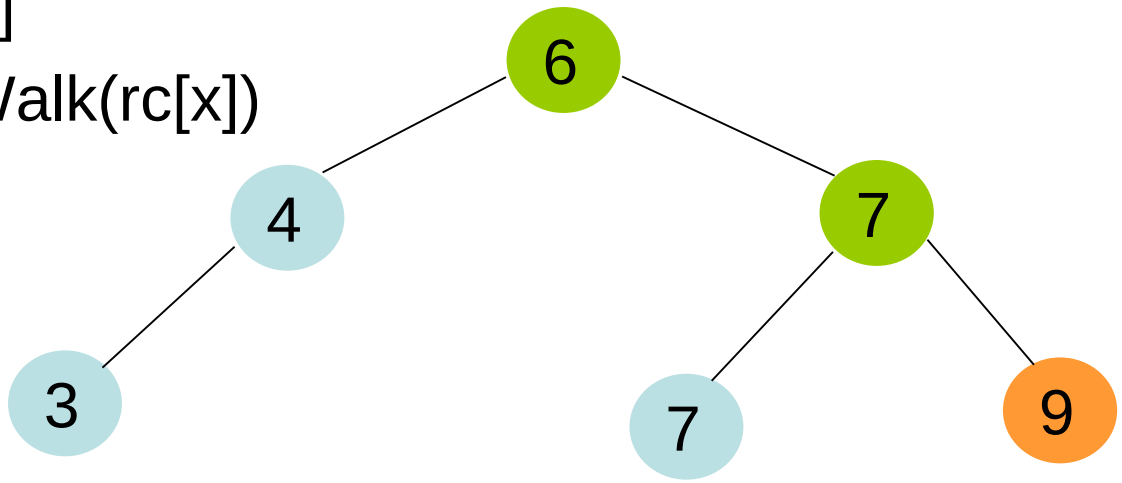


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

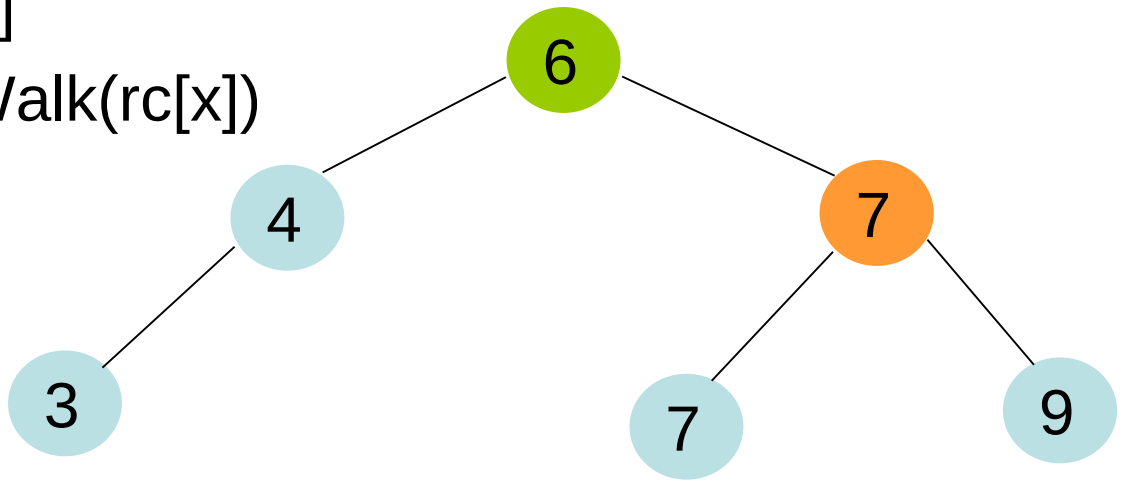


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

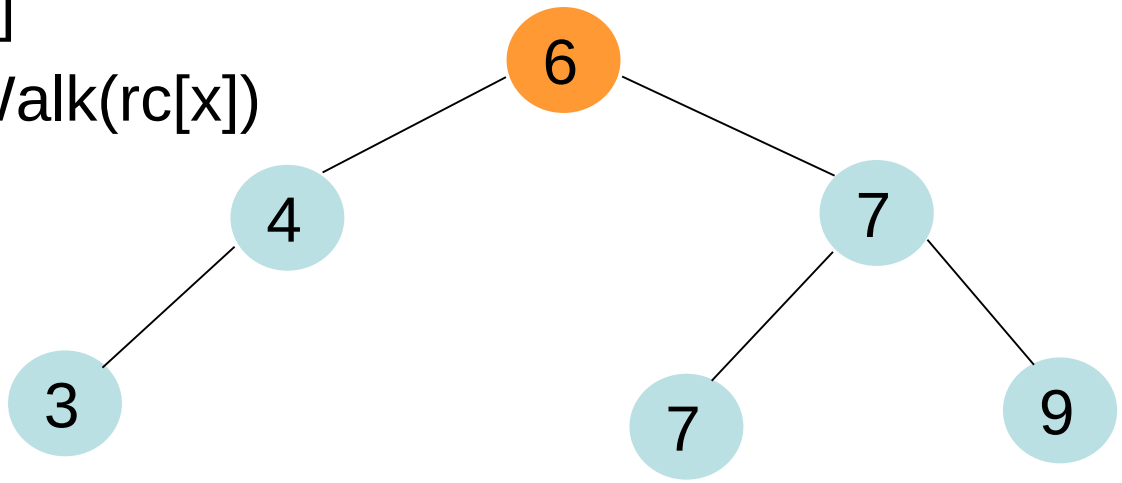


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

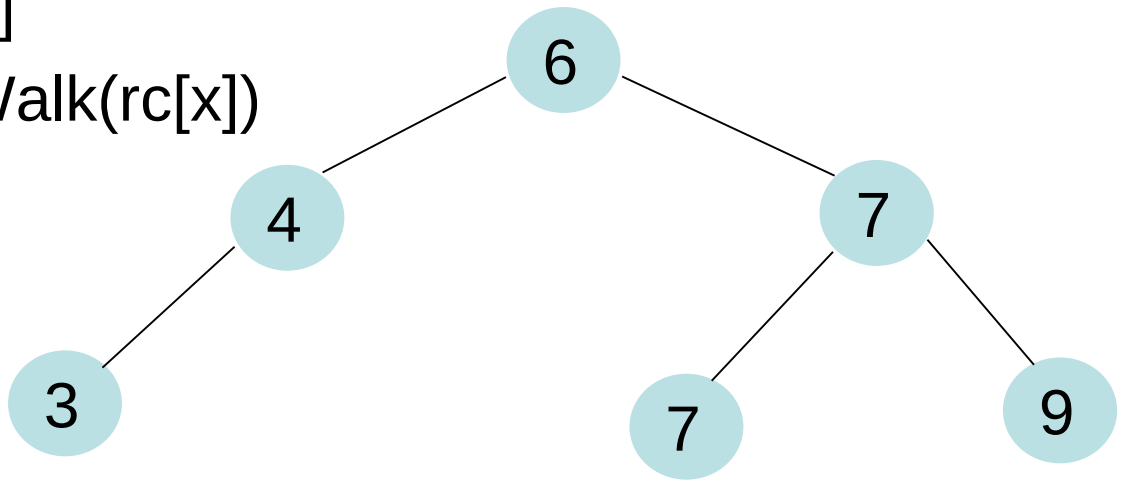


Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9



Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

Laufzeit $\Theta(n)$
Quizfrage: Warum?

Ergebnis: aufsteigend sortierte Ausgabe der Schlüssel

Beweis: Suchbaumeigenschaft + vollständige Induktion

Quizfrage: Wie erreiche ich absteigend sortierte Ausgabe?

Binäre Suchbäume

Inorder-Tree-Walk(x)

1. **if** x≠**nil then**
2. Inorder-Tree-Walk(lc[x])
3. Ausgabe key[x]
4. Inorder-Tree-Walk(rc[x])

Ausgabe:
3, 4, 6, 7, 7, 9

Ergebnis: aufsteigend sortierte Ausgabe der Schlüssel

Beweis: Suchbaumeigenschaft + vollständige Induktion

Quizfrage: Warum kann ich keinen Suchbaum in O(n) Zeit aufbauen?

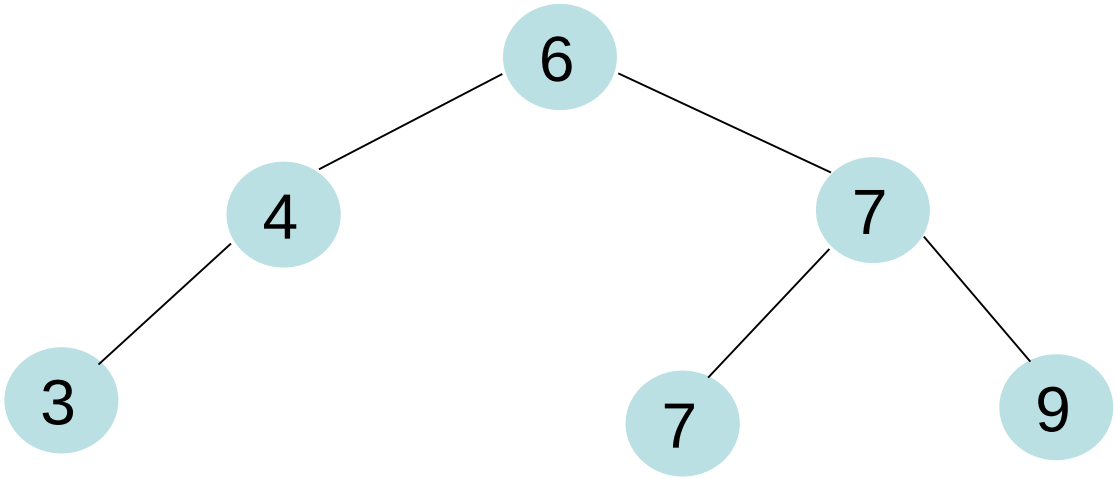
Suchen in Binärbäumen

- Gegeben ist Schlüssel k
- Gesucht ist ein Knoten mit Schlüssel k

Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)



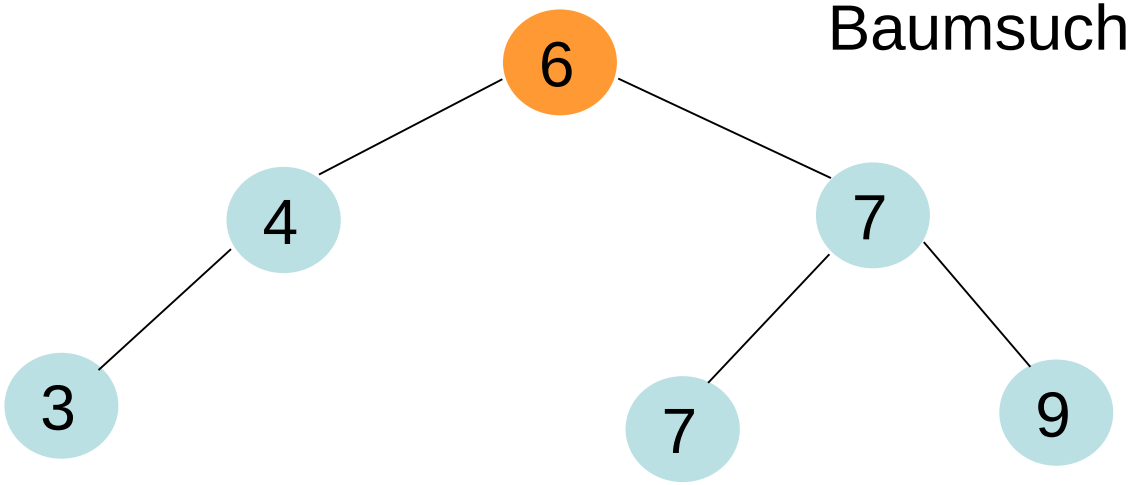
Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

Aufruf mit x=root[T]

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

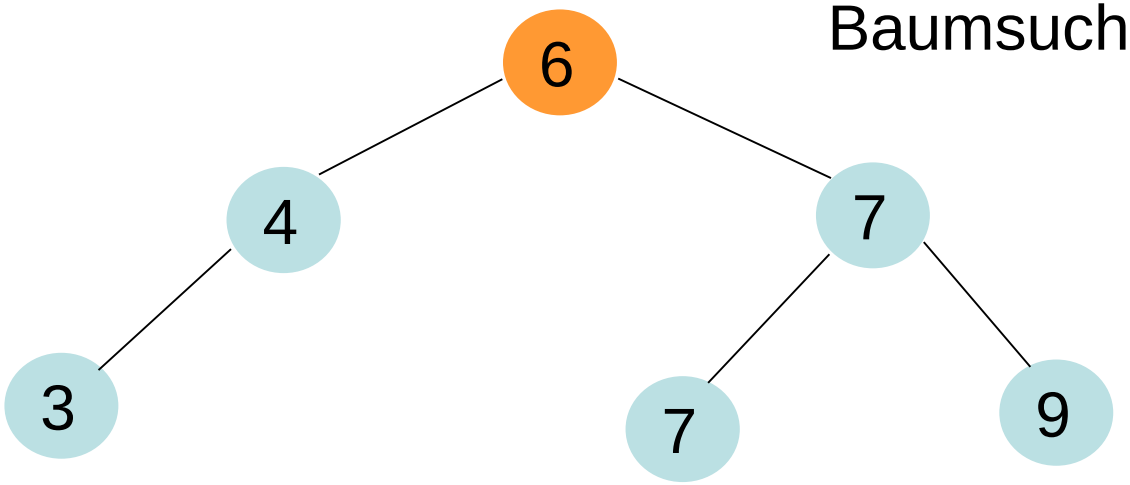


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

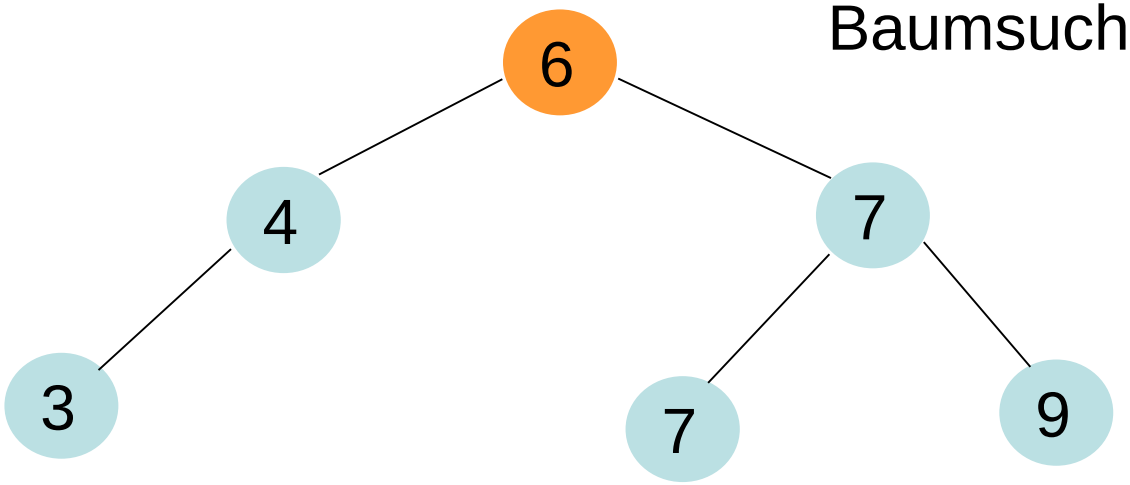


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

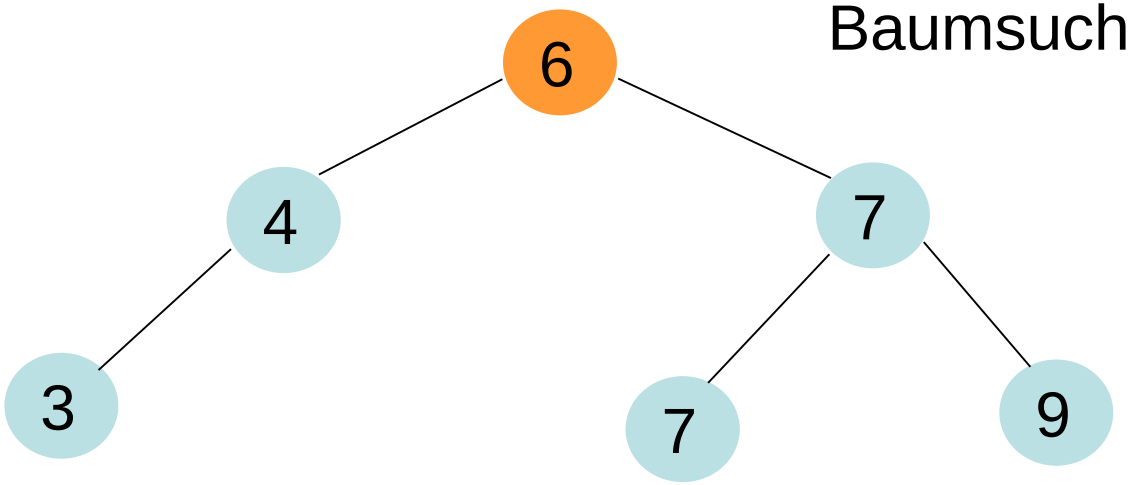


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

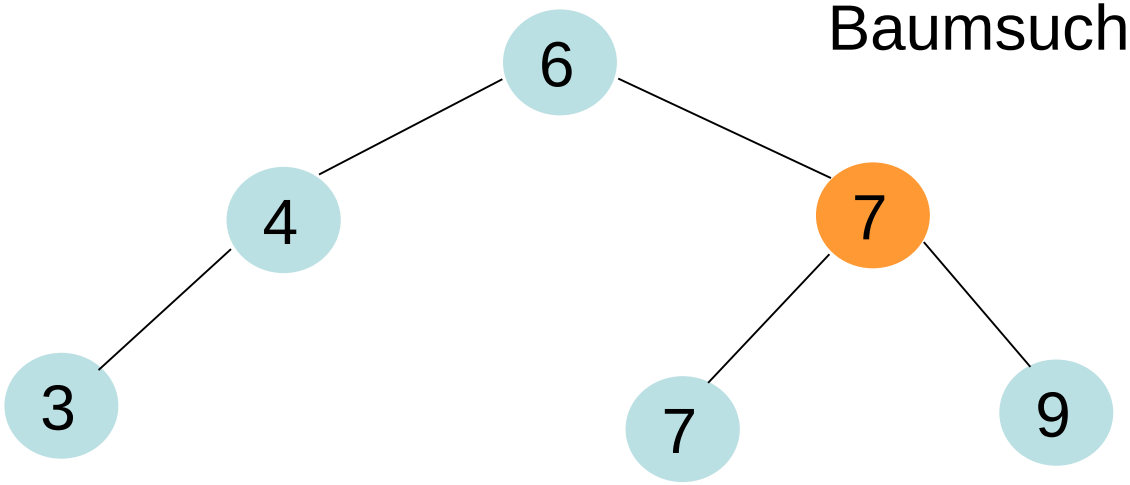


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

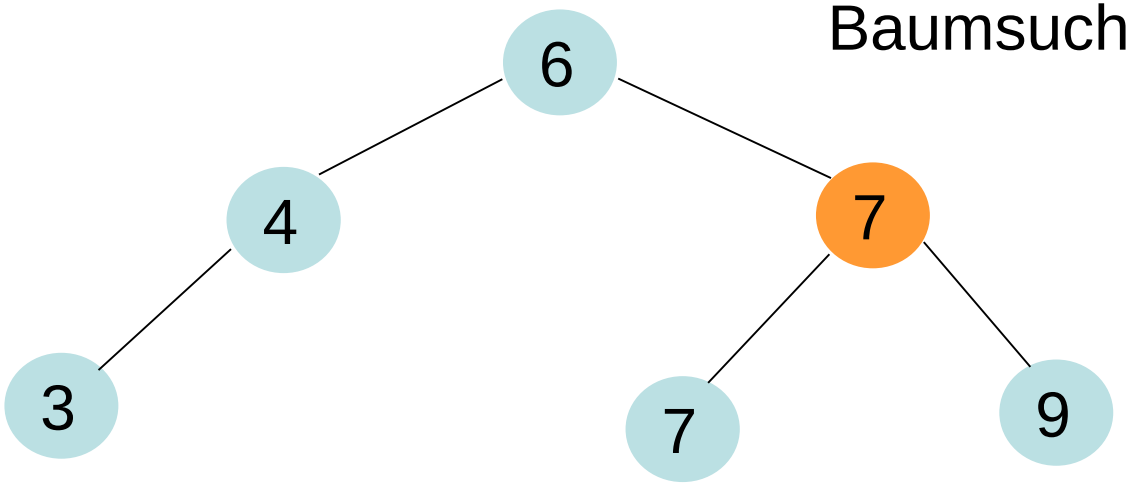


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

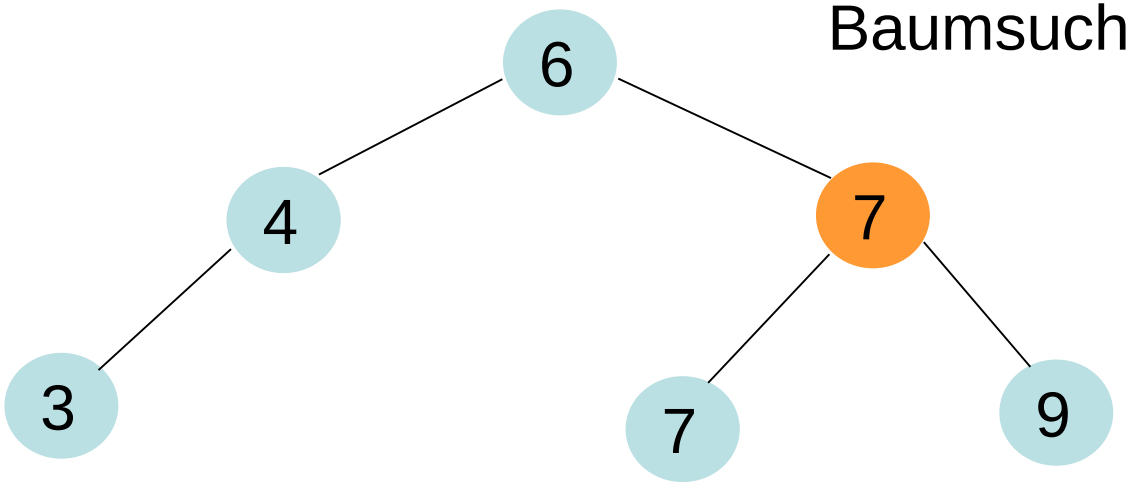


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

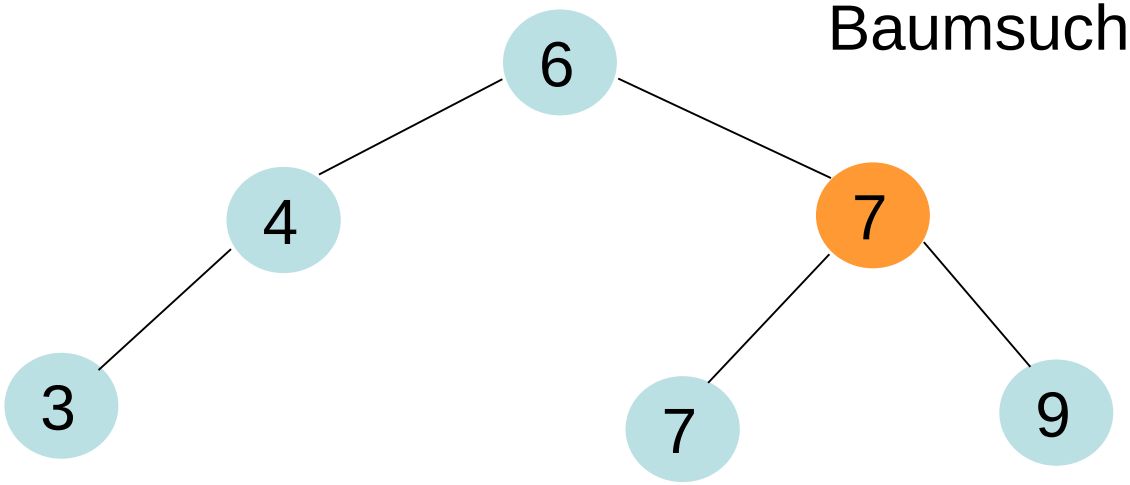


Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)



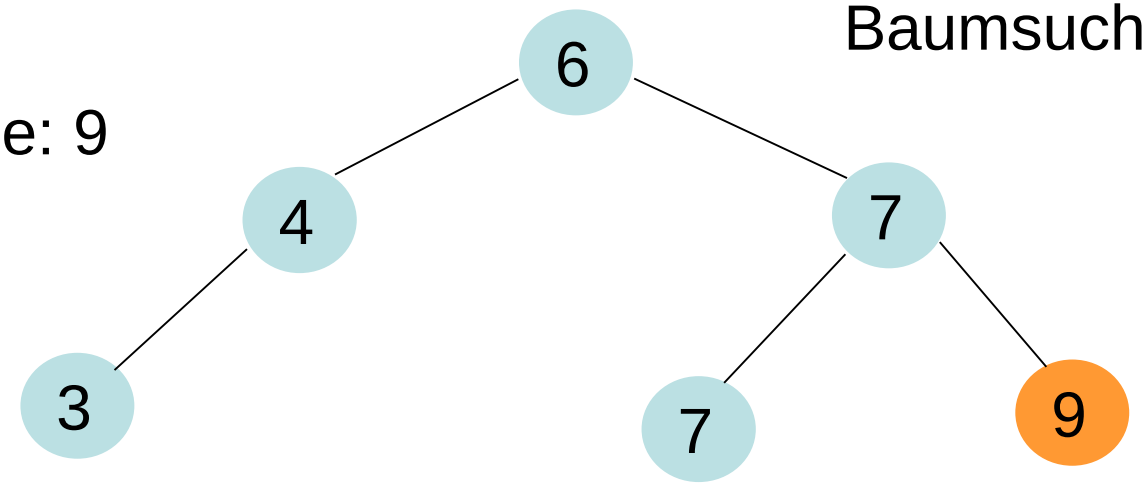
Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)

Baumsuche(root[T],9)

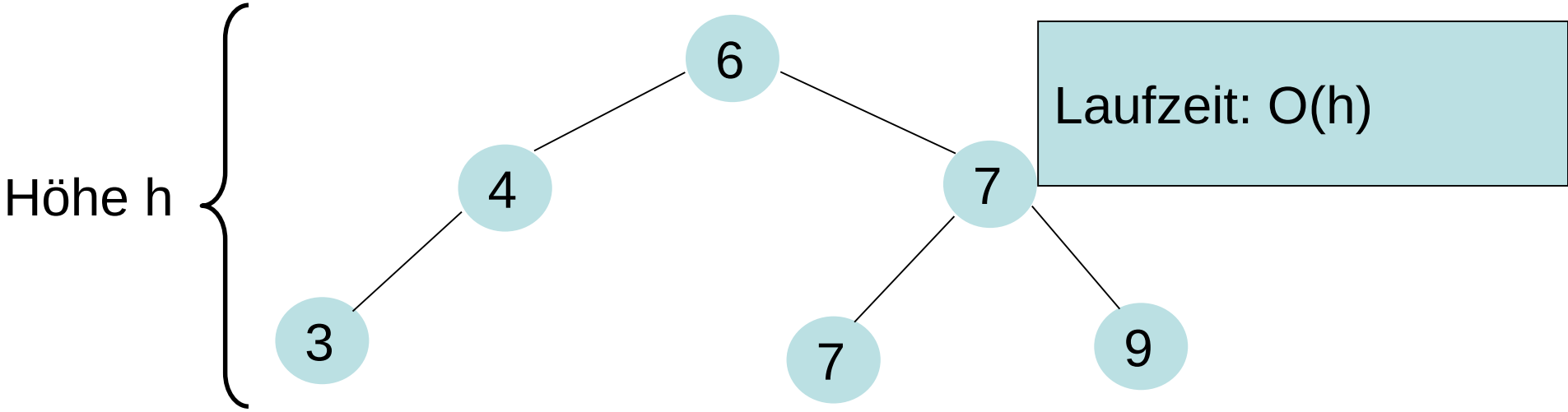
Ausgabe: 9



Binäre Suchbäume

Baumsuche(x,k)

1. **if** x=**nil or** k=key[x] **then return** x
2. **if** k<key[x] **then return** Baumsuche(lc[x],k)
3. **else** return Baumsuche(rc[x],k)



Weitere Operationen in Binärbäumen

- Minimum/Maximumsuche
- Nachfolger/Vorgänger

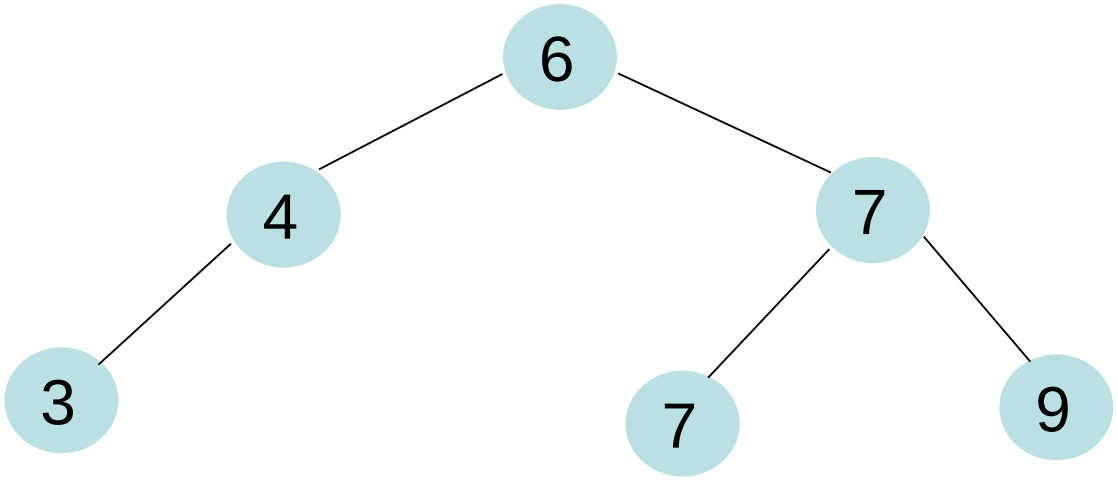
Minimum- und Maximumsuche:

- Suchbaumeigenschaft:
  Alle Knoten im rechten Unterbaum eines Knotens x sind größer gleich key[x]
- Alle Knoten im linken Unterbaum von x sind $\leq$ key[x]

Binäre Suchbäume

MinimumSuche(x)

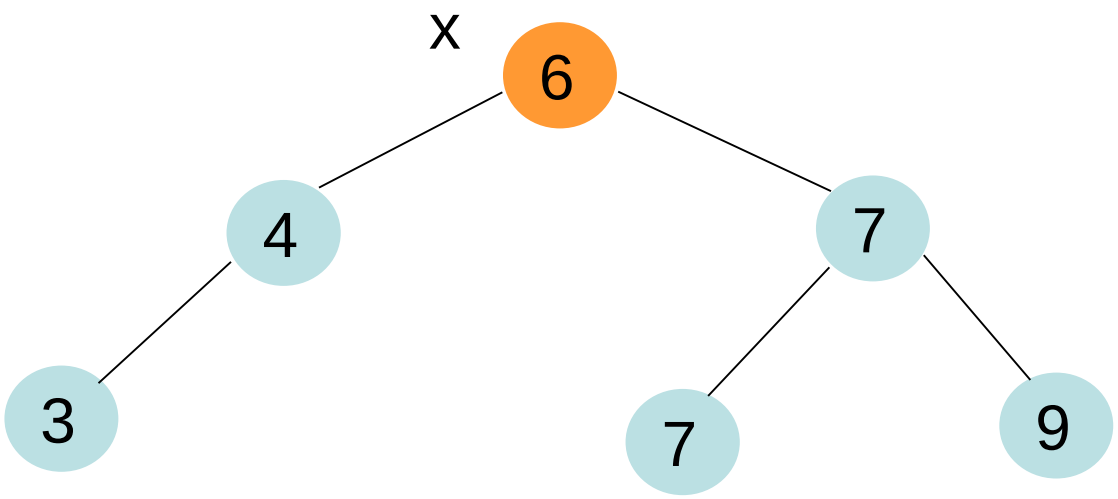
1. **while** lc[x]≠**nil do** x ← lc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MinimumSuche(x)

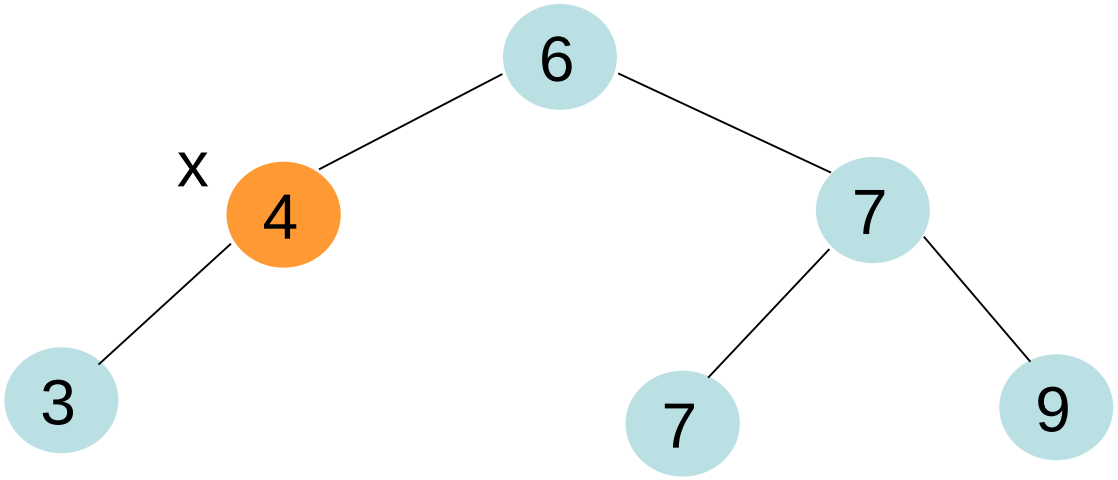
1. **while** lc[x]≠**nil do** x ← lc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MinimumSuche(x)

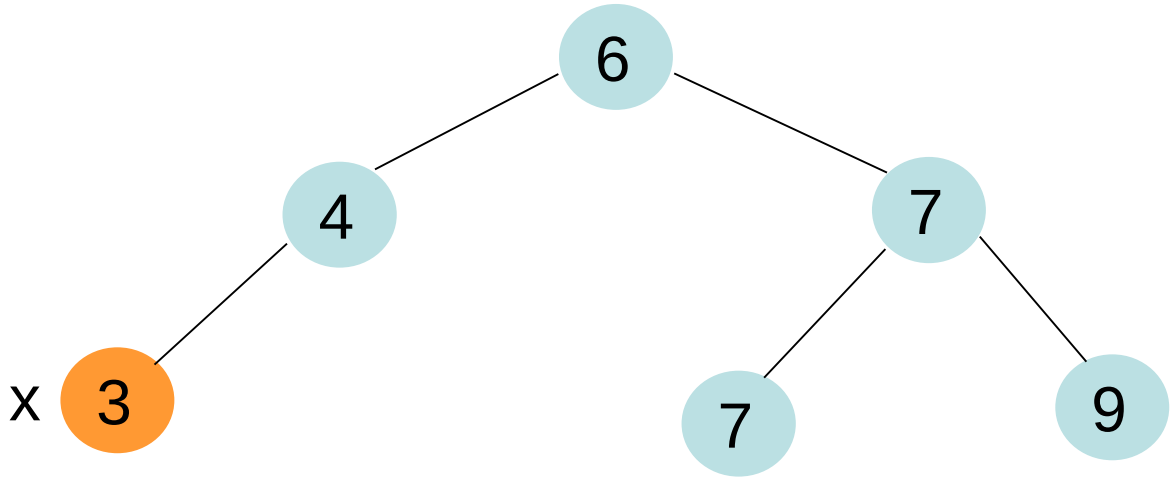
1. **while** lc[x]≠**nil do** x ← lc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MinimumSuche(x)

1. **while** lc[x]≠**nil do** x ← lc[x]
2. **return** x

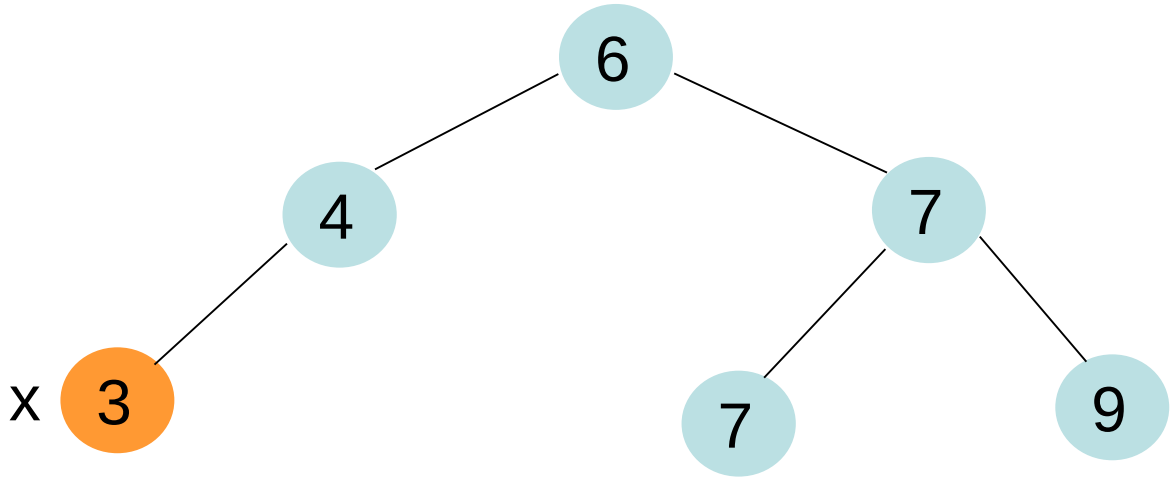


Binäre Suchbäume

MinimumSuche(x)

1. **while** lc[x]≠**nil do** x ← lc[x]
2. **return** x

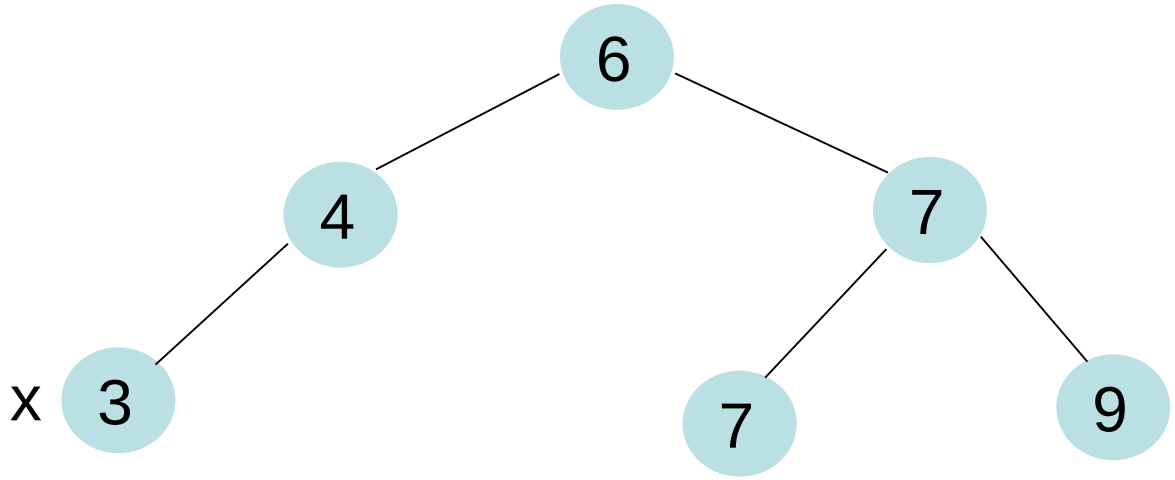
Laufzeit O(h)



Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

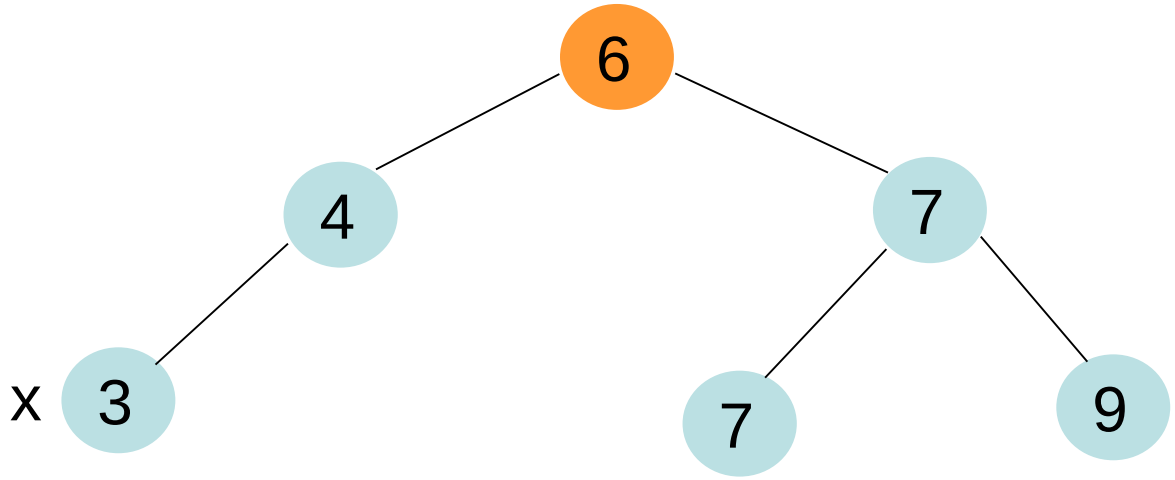
1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

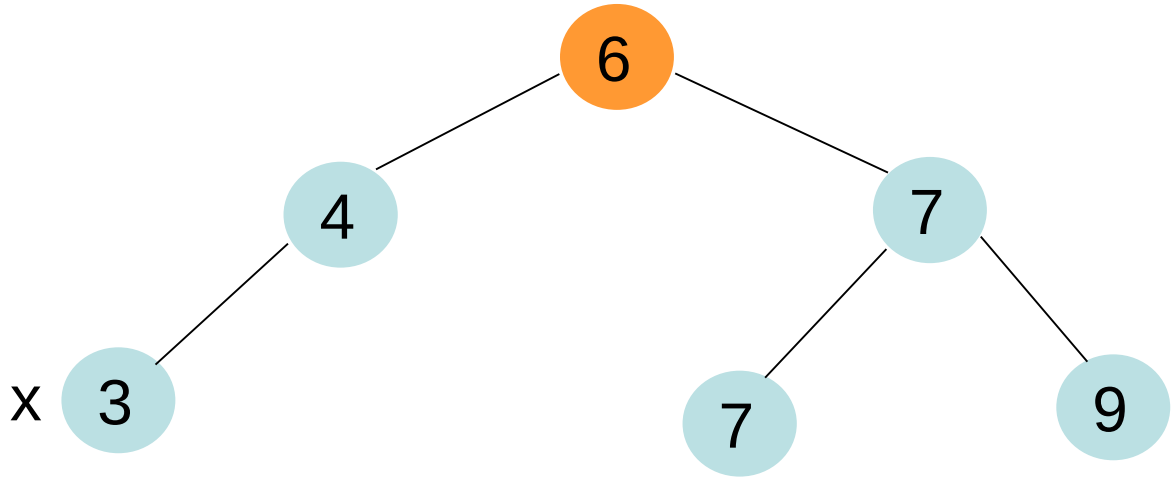
1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

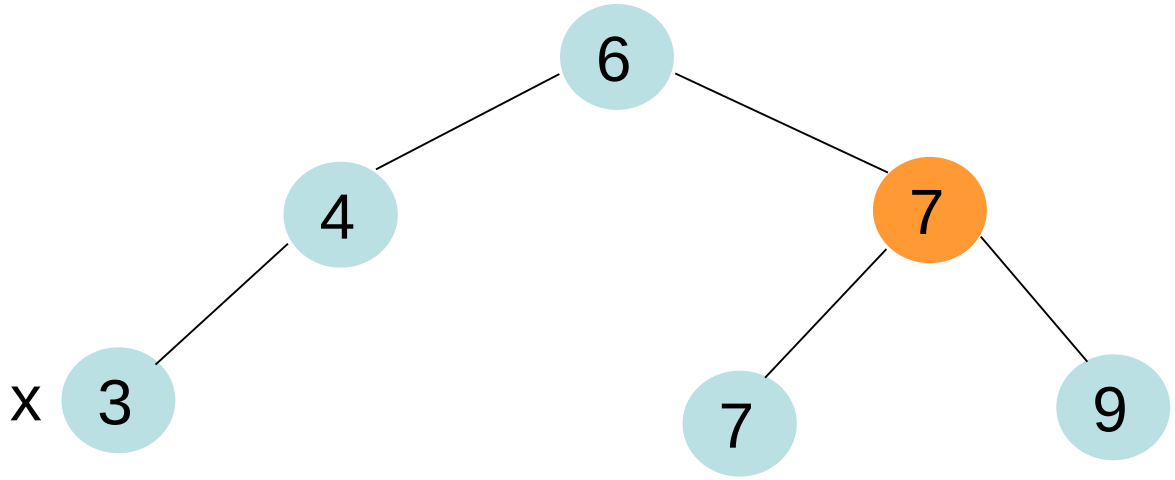
1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

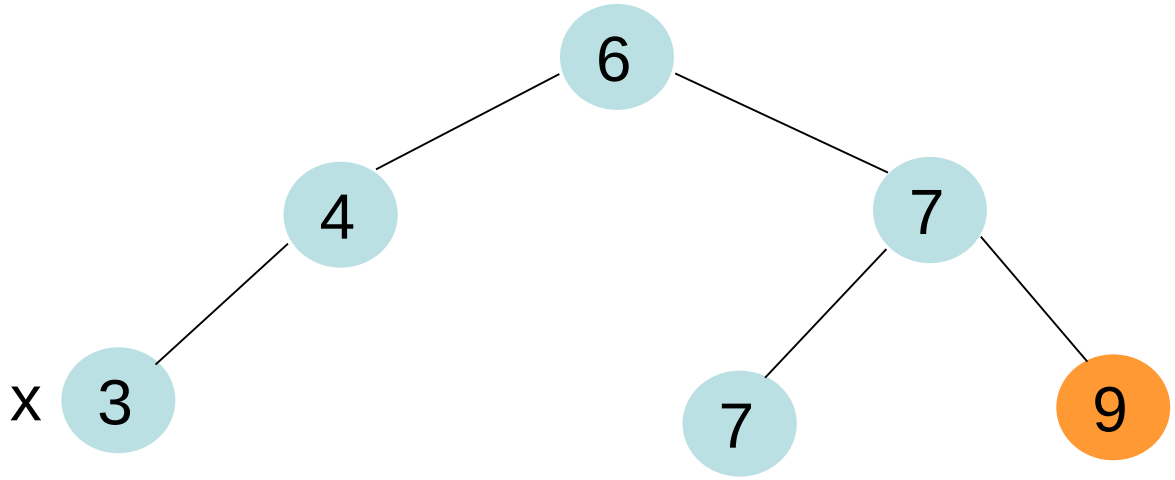
1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x



Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x

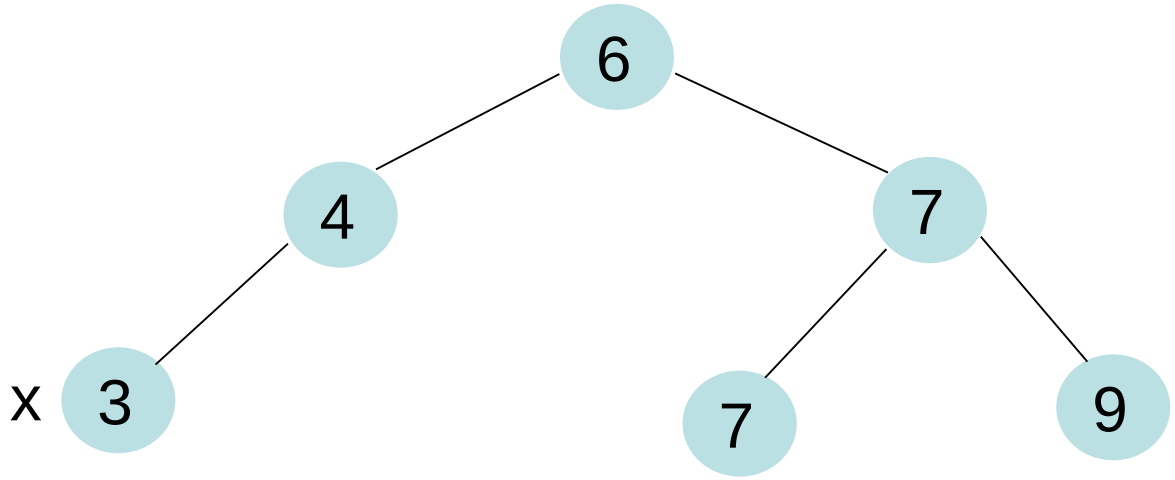


Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x

Laufzeit O(h)

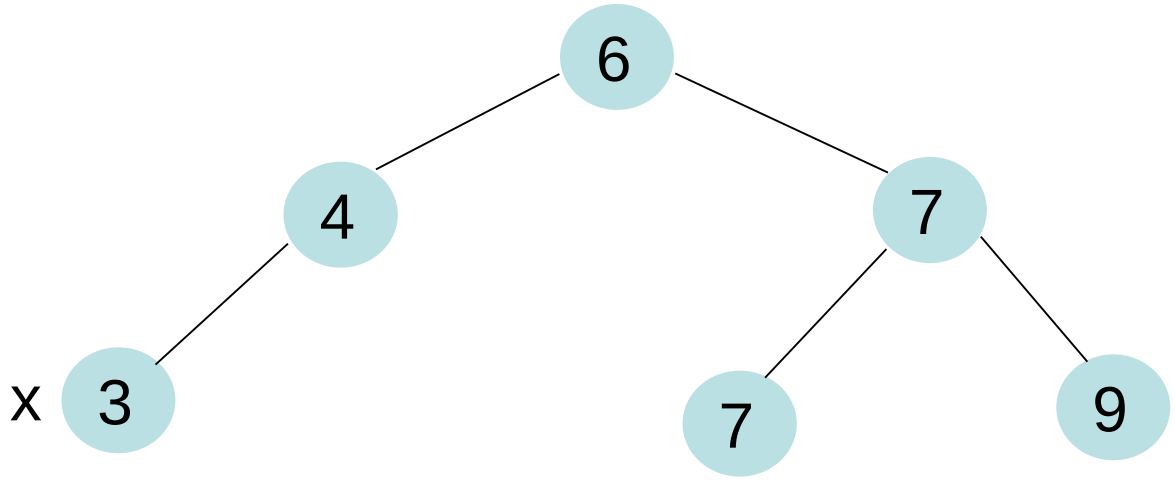


Binäre Suchbäume

MaximumSuche(x)

1. **while** rc[x]≠**nil do** x ← rc[x]
2. **return** x

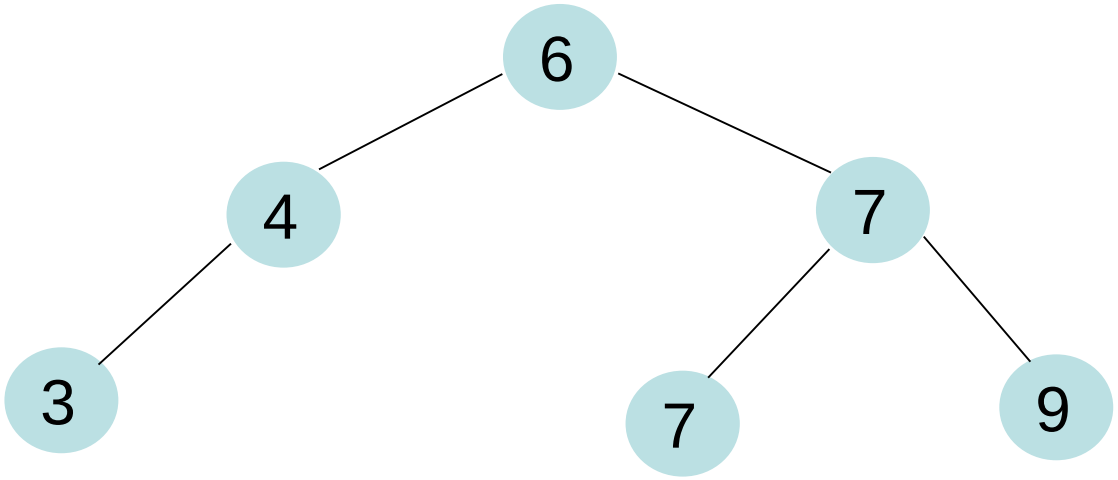
Laufzeit O(h)



Binäre Suchbäume

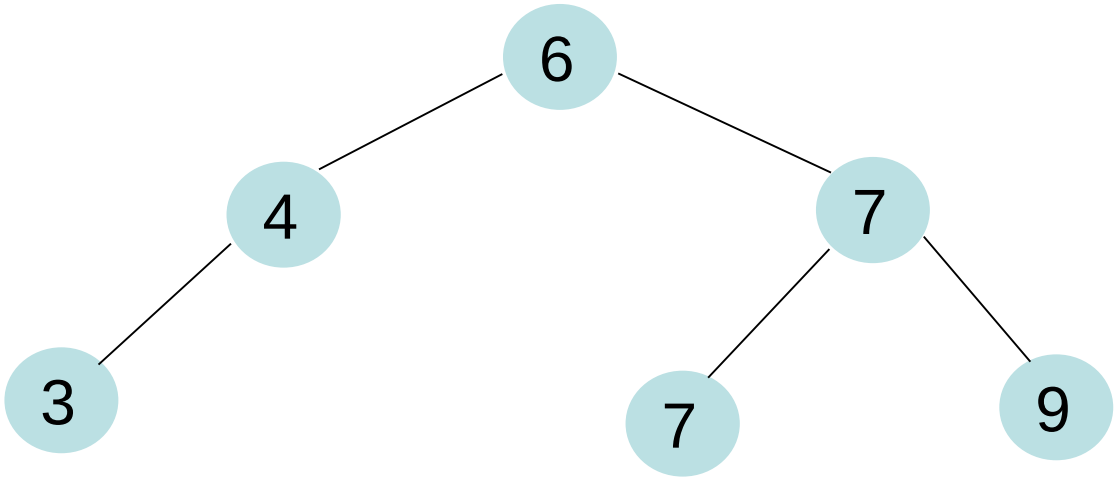
Nachfolgersuche:

- Nachfolger bzgl. der Ausgabe von Inorder-Tree-Walk
- Wenn alle Schlüssel unterschiedlich, dann ist das der nächstgrößere Schlüssel



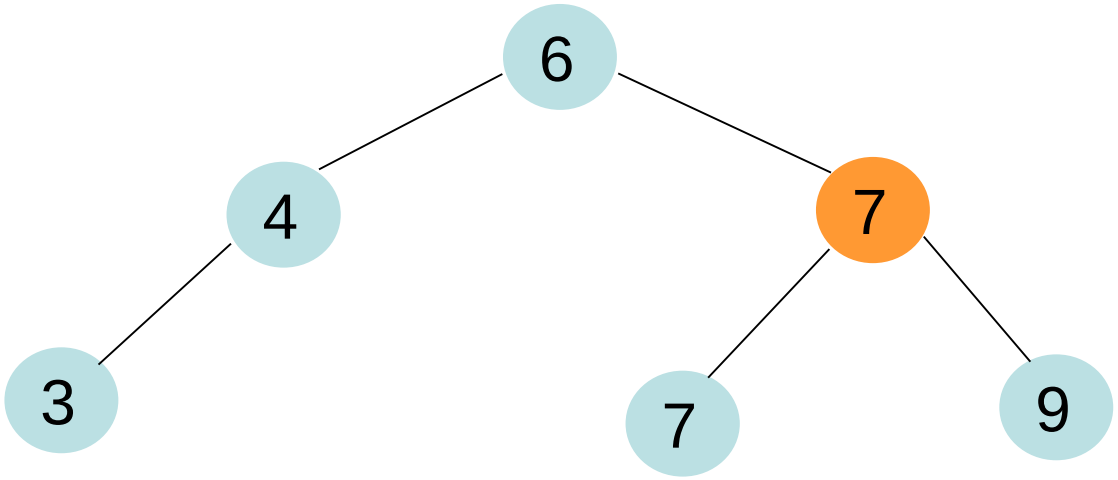
Nachfolgersuche:

- Fall 1 (rechter Unterbaum von x nicht leer):
  Dann ist der linkeste Knoten im rechten Unterbaum der Nachfolger von x



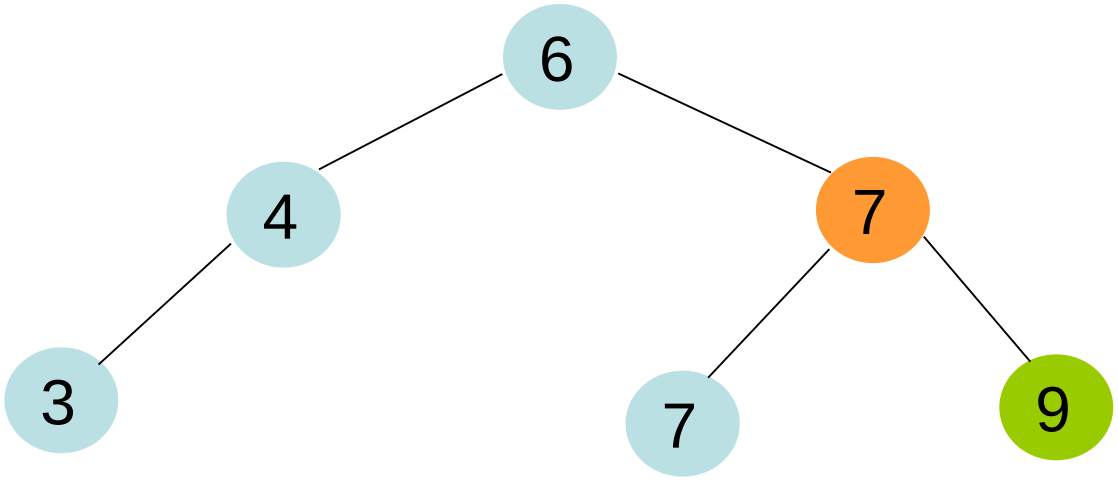
Nachfolgersuche:

- Fall 1 (rechter Unterbaum von x nicht leer):
  Dann ist der linkeste Knoten im rechten Unterbaum der Nachfolger von x



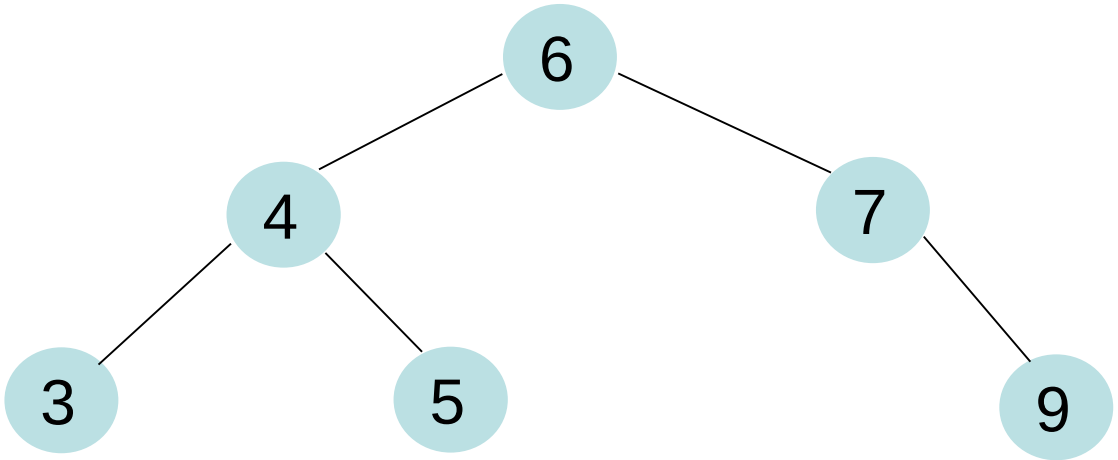
Nachfolgersuche:

- Fall 1 (rechter Unterbaum von x nicht leer):
  Dann ist der linkeste Knoten im rechten Unterbaum der Nachfolger von x



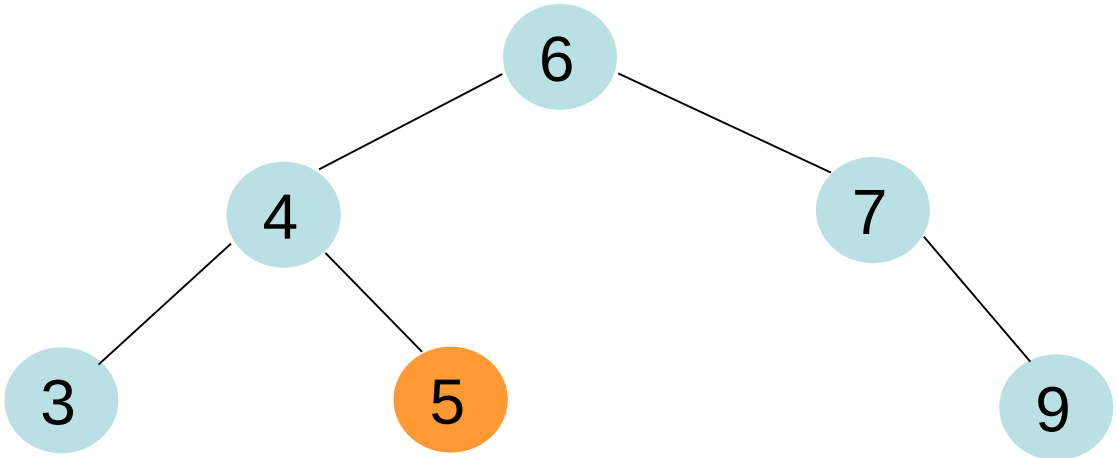
Nachfolgersuche:

- Fall 2 (rechter Unterbaum von x leer und x hat Nachfolger y): Dann ist y der niedrigste Vorgänger von x, dessen linkes Kind ebenfalls Vorgänger von x ist



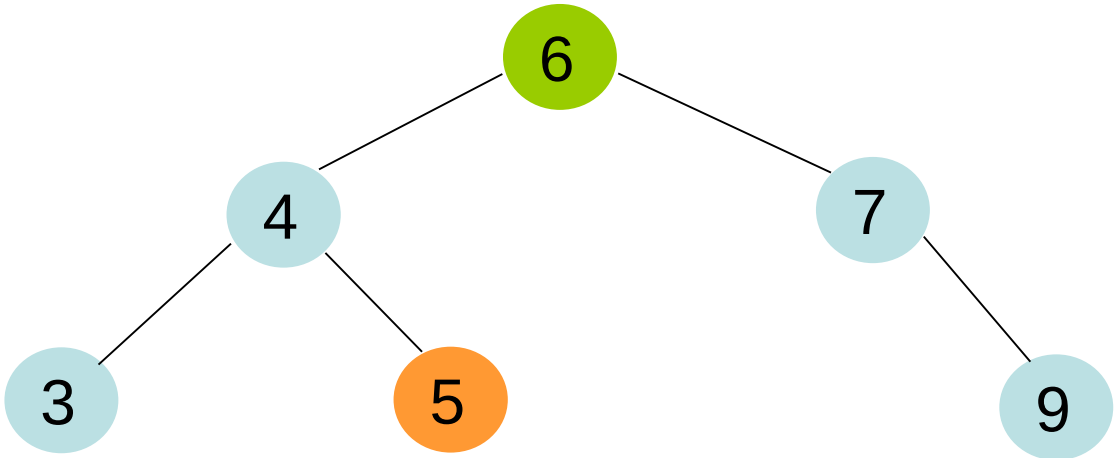
Nachfolgersuche:

- Fall 2 (rechter Unterbaum von x leer und x hat Nachfolger y): Dann ist y der niedrigste Vorgänger von x, dessen linkes Kind ebenfalls Vorgänger von x ist



Nachfolgersuche:

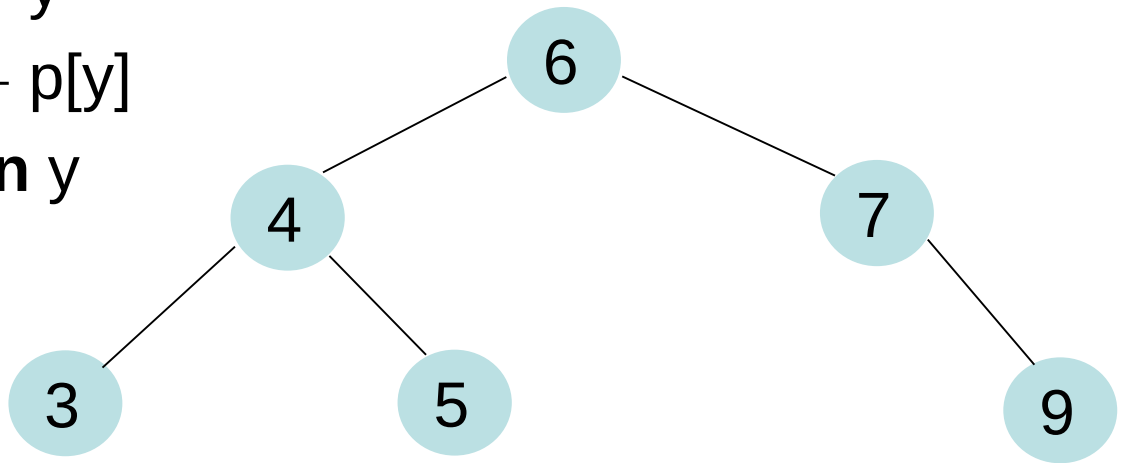
- Fall 2 (rechter Unterbaum von x leer und x hat Vorgänger y): Dann ist y der niedrigste Vorgänger von x, dessen linkes Kind ebenfalls Vorgänger von x ist



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y

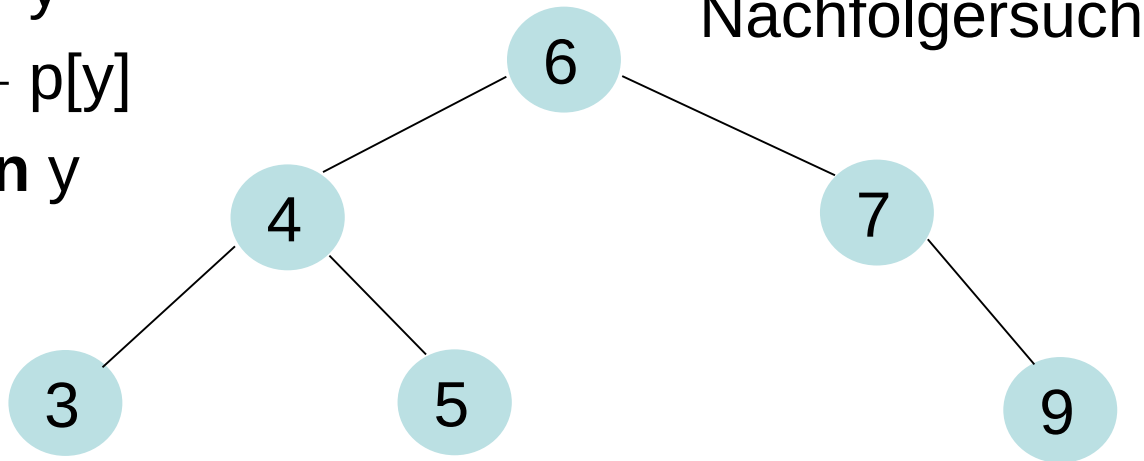


Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y

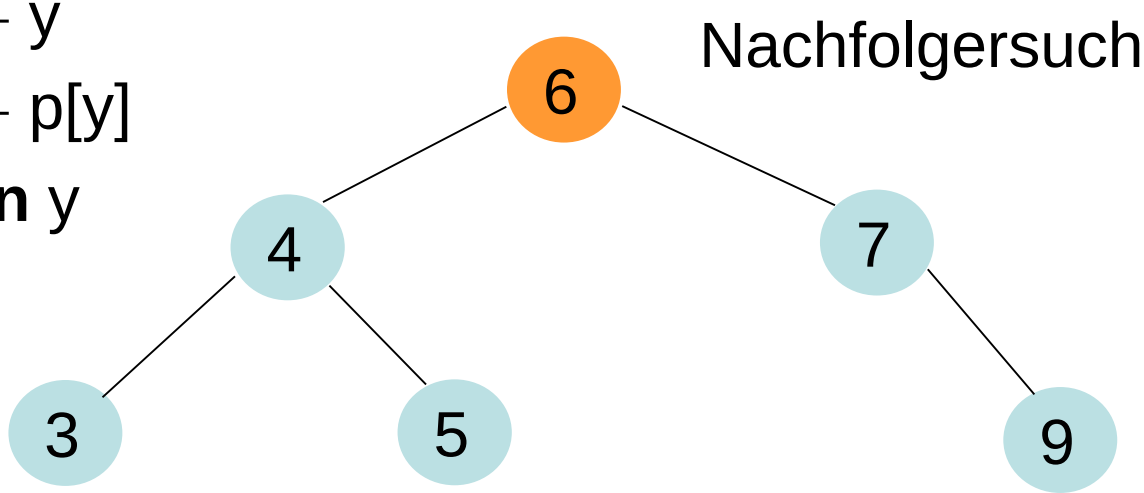
Nachfolgersuche(6)



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

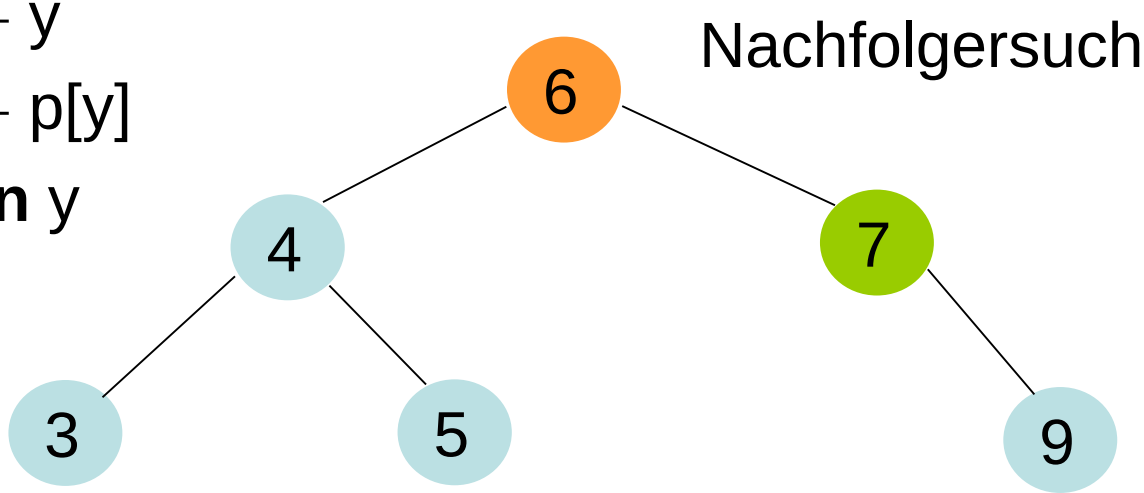
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

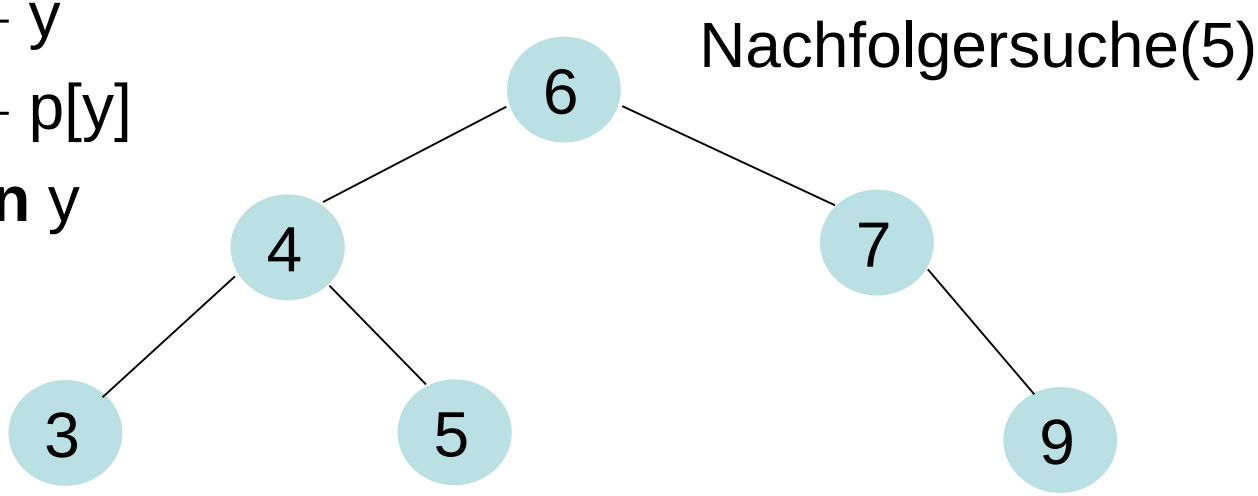
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

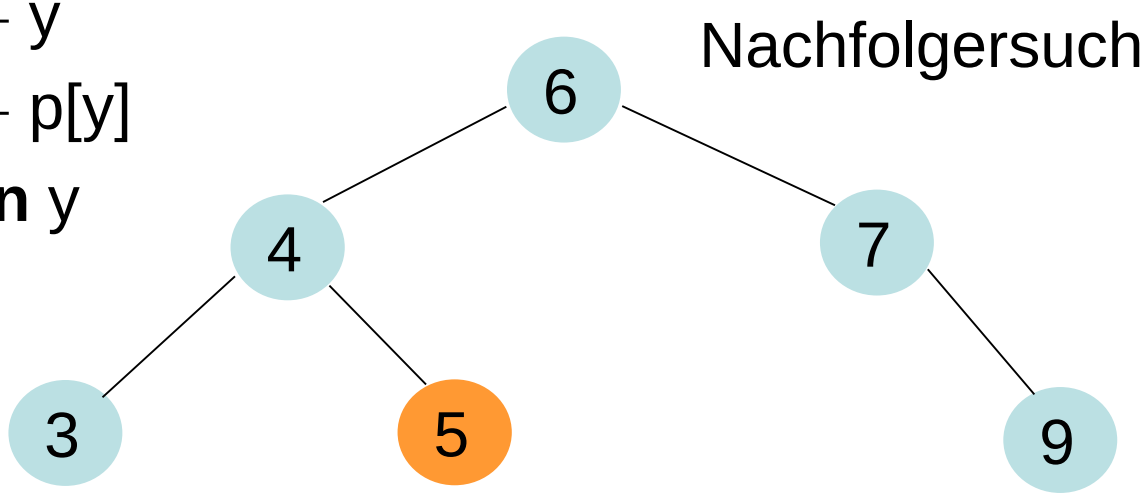
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

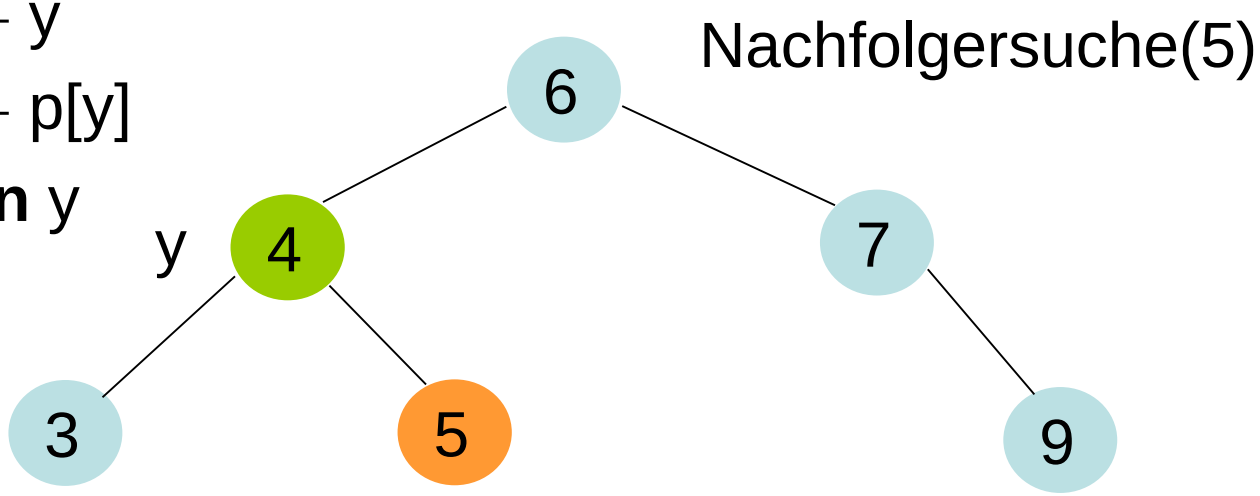
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

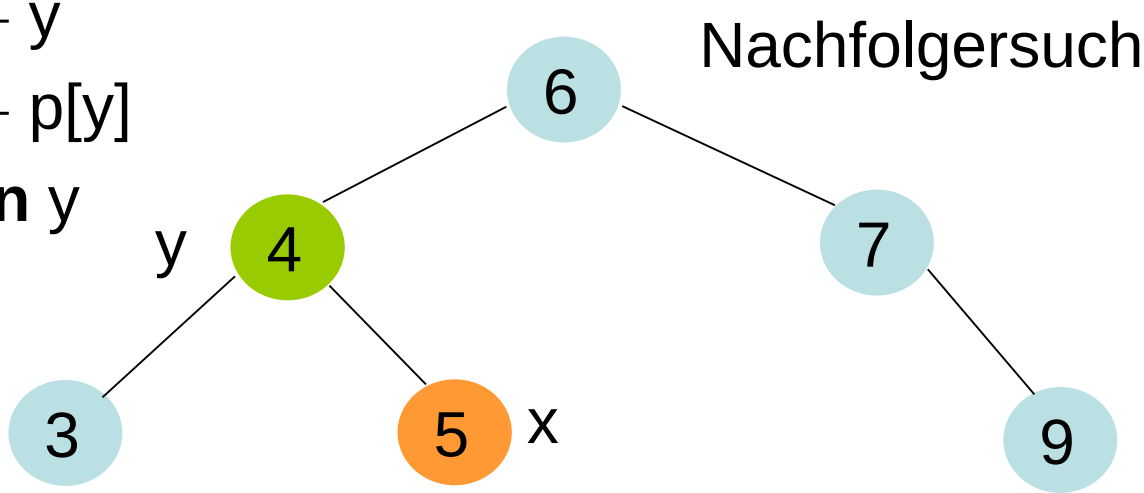
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

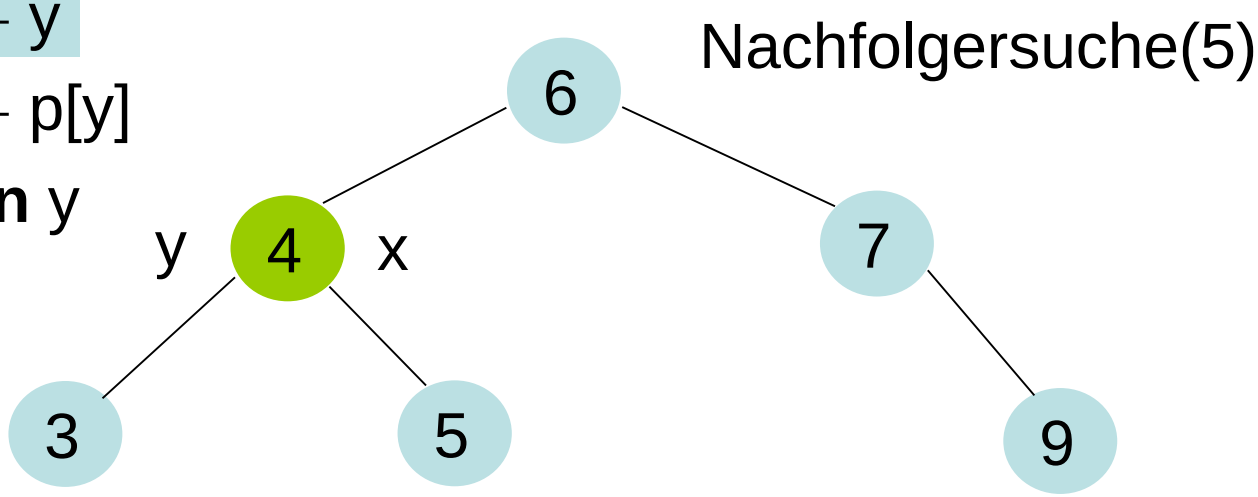
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

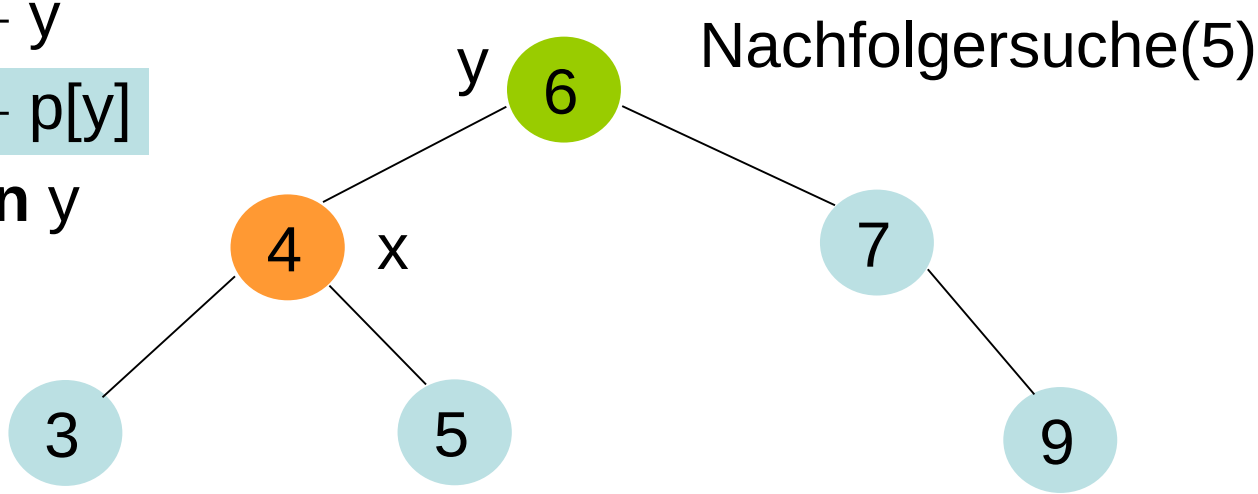
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

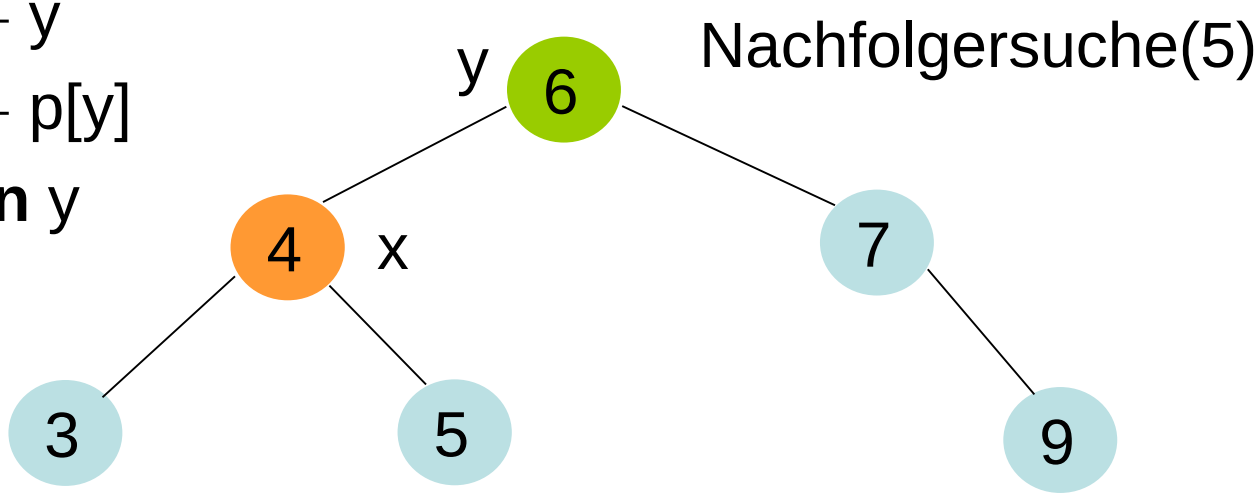
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

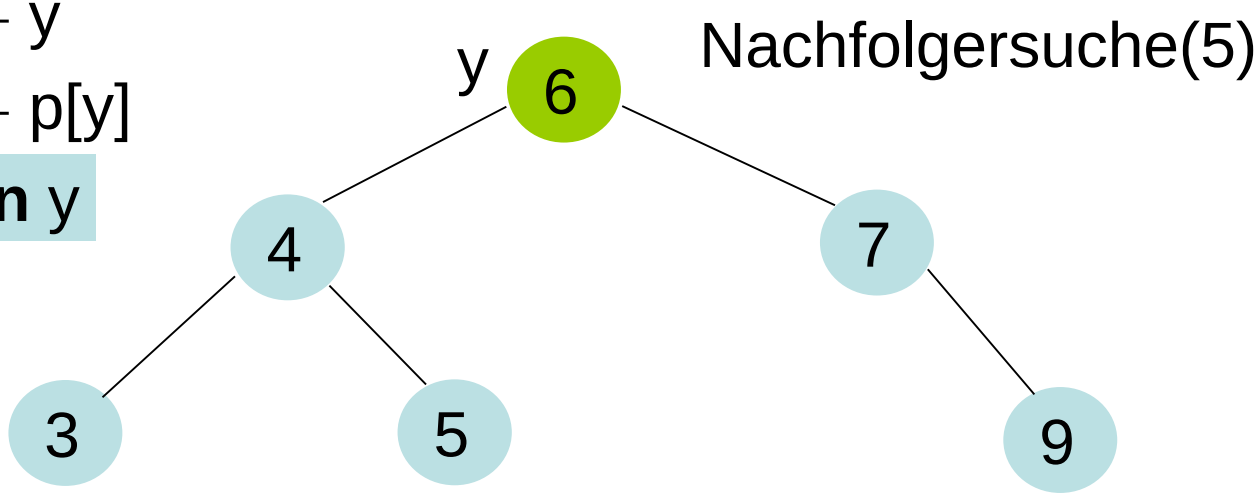
1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y



Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y

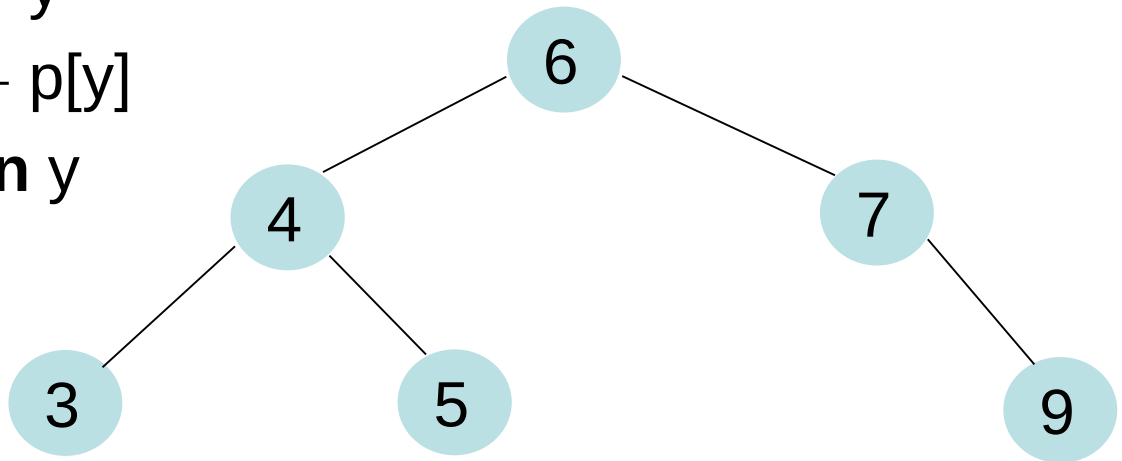


Binäre Suchbäume

Nachfolgersuche(x)

1. **if** rc[x] ≠ **nil then return** MinimumSuche(rc[x])
2. y ← p[x]
3. **while** y ≠ **nil** and x=rc[y] **do**
4. x ← y
5. y ← p[y]
6. **return** y

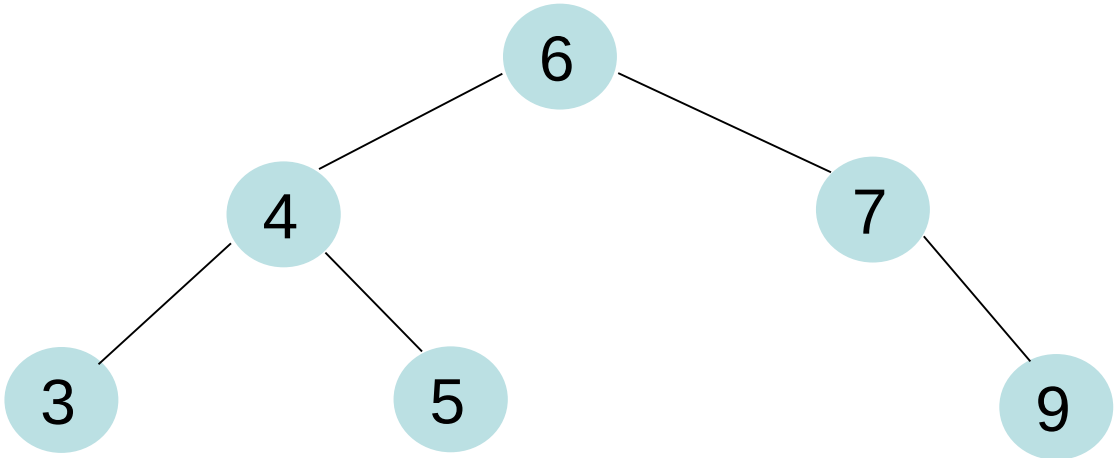
Laufzeit O(h)



Binäre Suchbäume

Vorgängersuche:

- Symmetrisch zu Nachfolgersuche
- Daher ebenfalls O(h) Laufzeit



Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume:

- Aufzählen der Elemente mit Inorder-Tree-Walk in O(n) Zeit
- Suche in O(h) Zeit
- Minimum/Maximum in O(h) Zeit

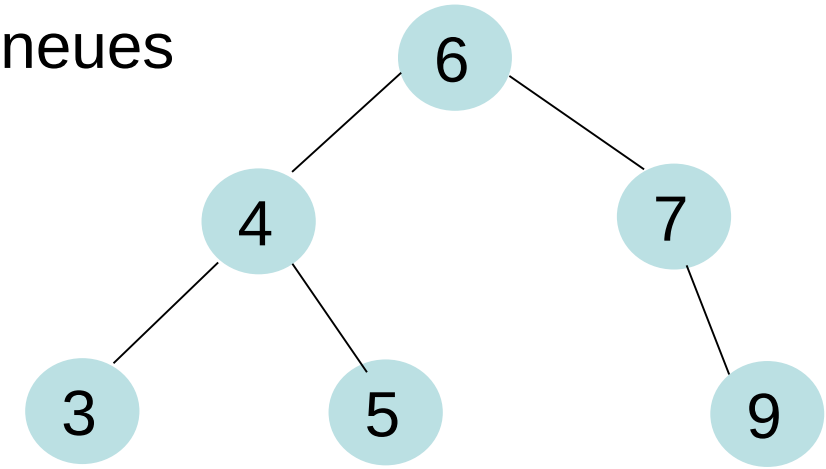
Dynamische Operationen?

- Einfügen und Löschen
- Müssen Suchbaumeigenschaft aufrecht erhalten
- Auswirkung auf Höhe des Baums?

Binäre Suchbäume

Einfügen:

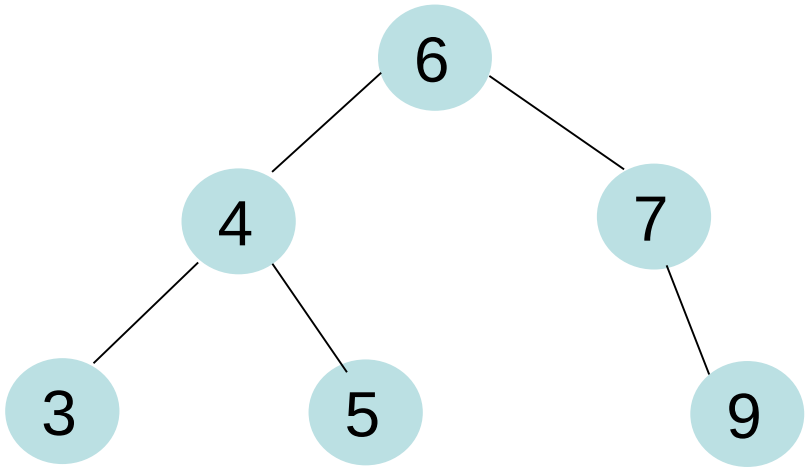
- Ähnlich wie Baumsuche: Finde geeigneten Knoten, an den neuer Knoten angehängt werden sollte
- Danach wird **nil**-Zeiger durch neues Element ersetzt



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

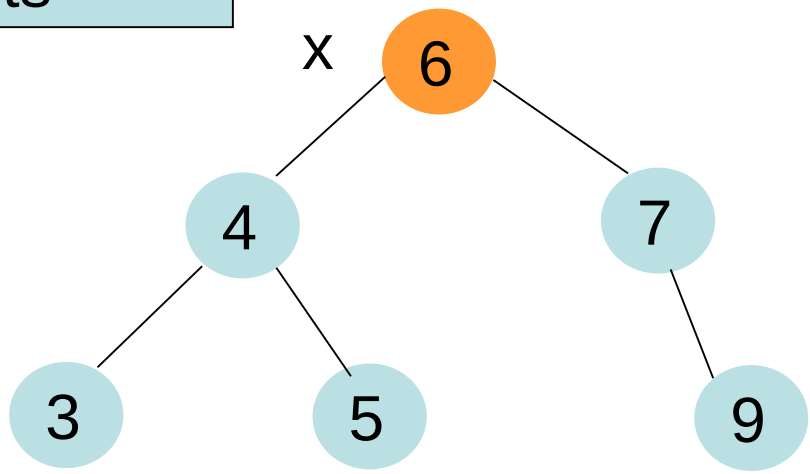


Binäre Suchbäume

```
Einfügen(T,z)
1. y← nil; x ← root[T]
2. while x≠nil do
3.     y ← x
4.     if key[z] < key[x] then x ← lc[x]
5.     else x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. if y=nil then root[T] ← z
8. else
9.      if key[z]< key[y] then lc[y] ← z
10.    else rc[y] ← z
```

y ist Vater des einzufügenden Elements

Einfügen(8)

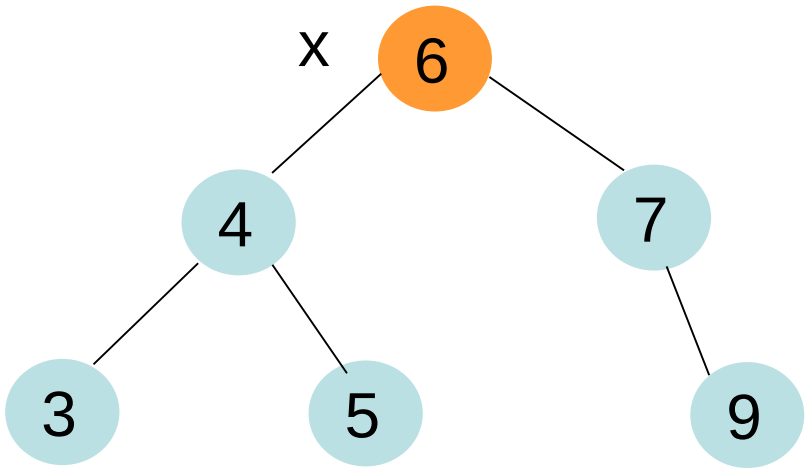


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

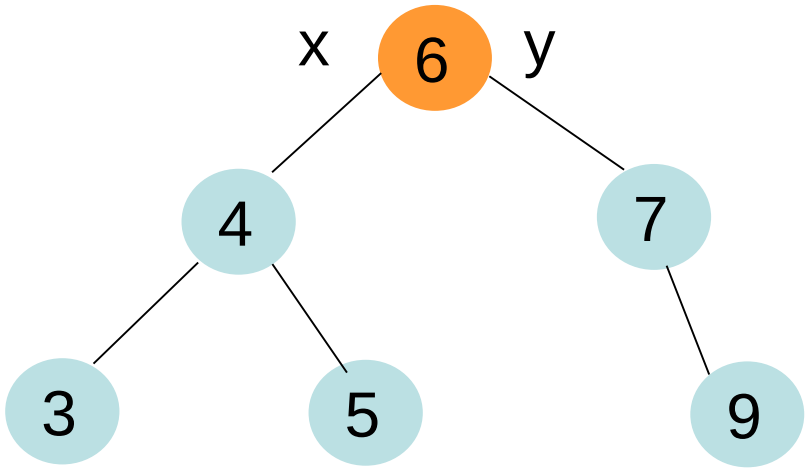


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

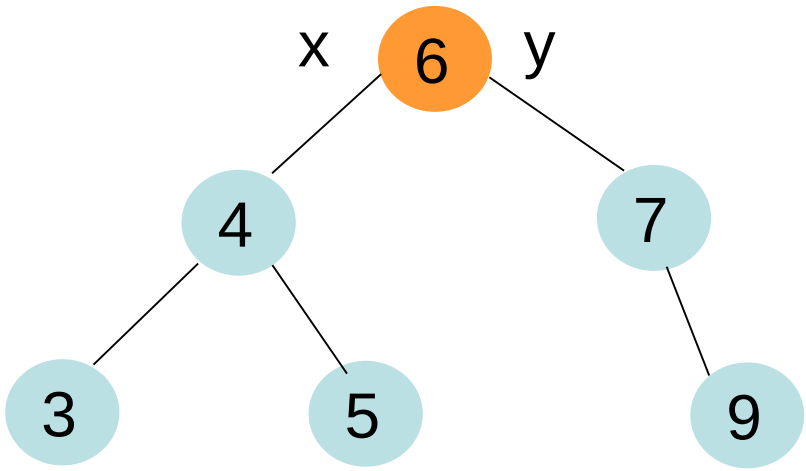


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

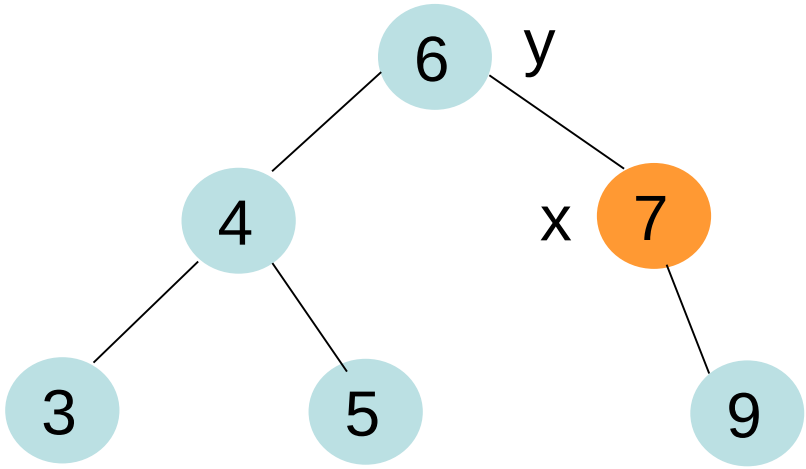


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

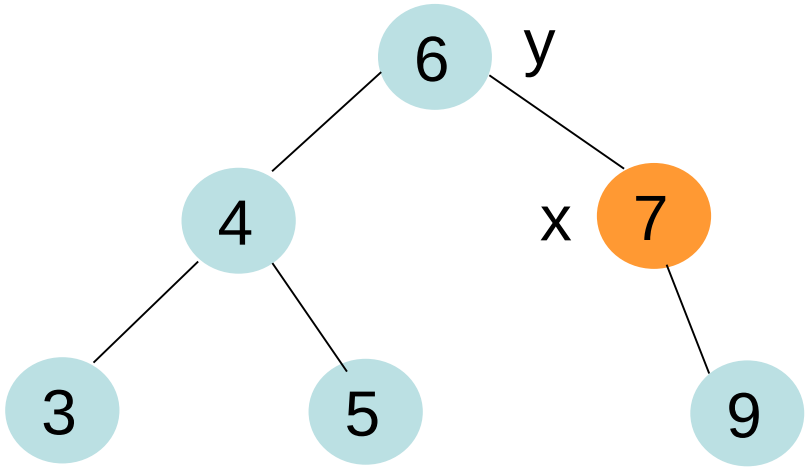


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

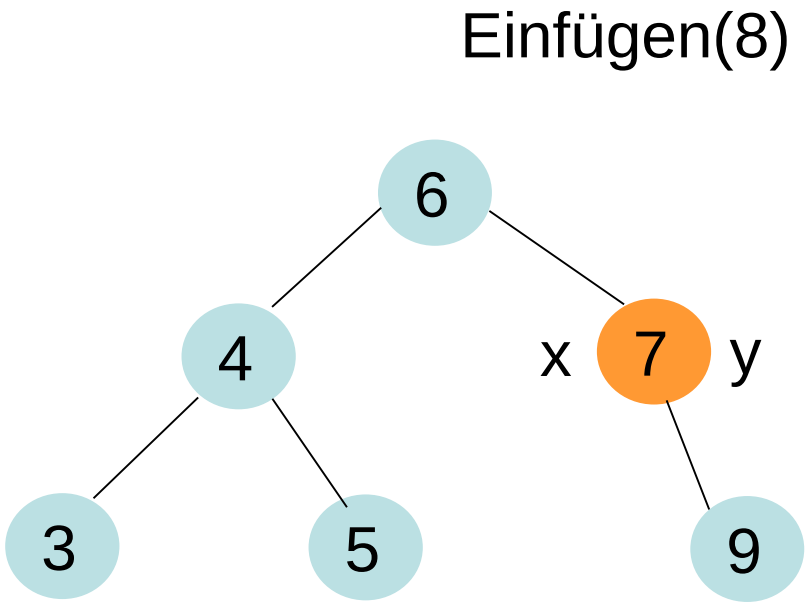
Einfügen(8)



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

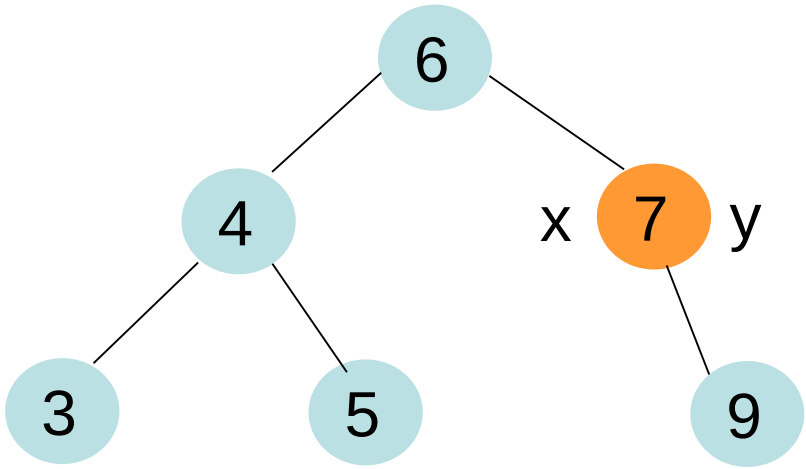


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

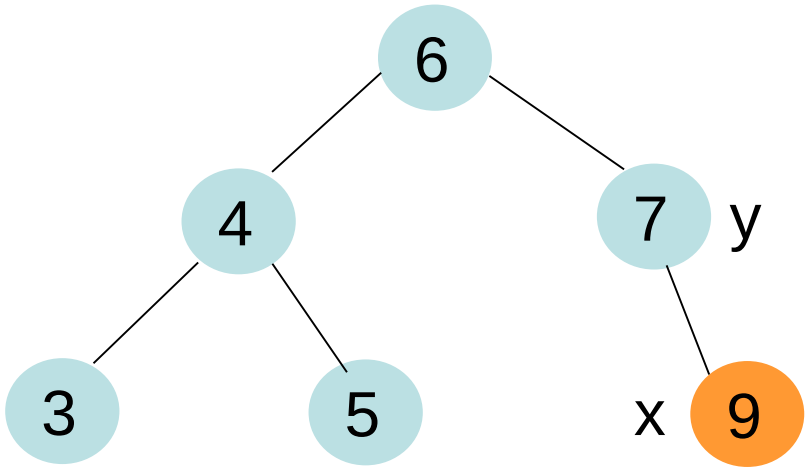


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

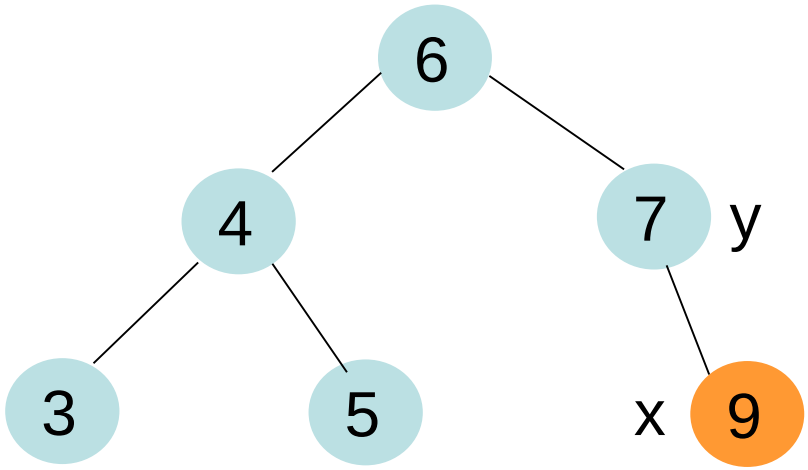


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

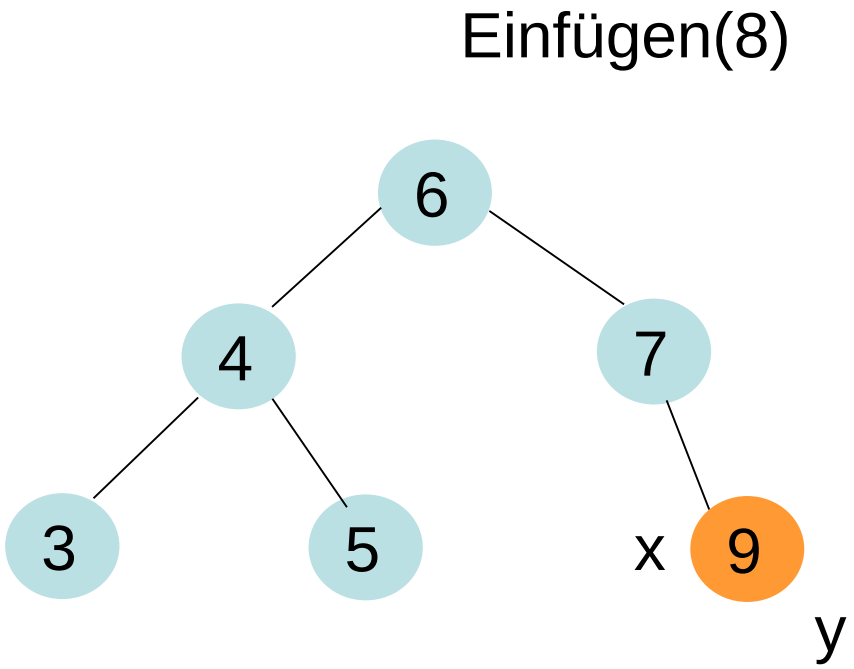
Einfügen(8)



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

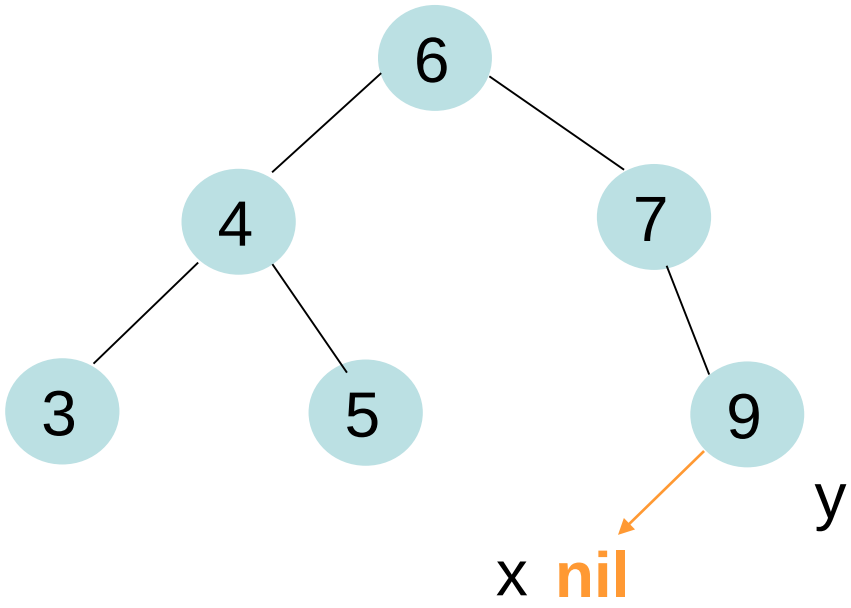


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

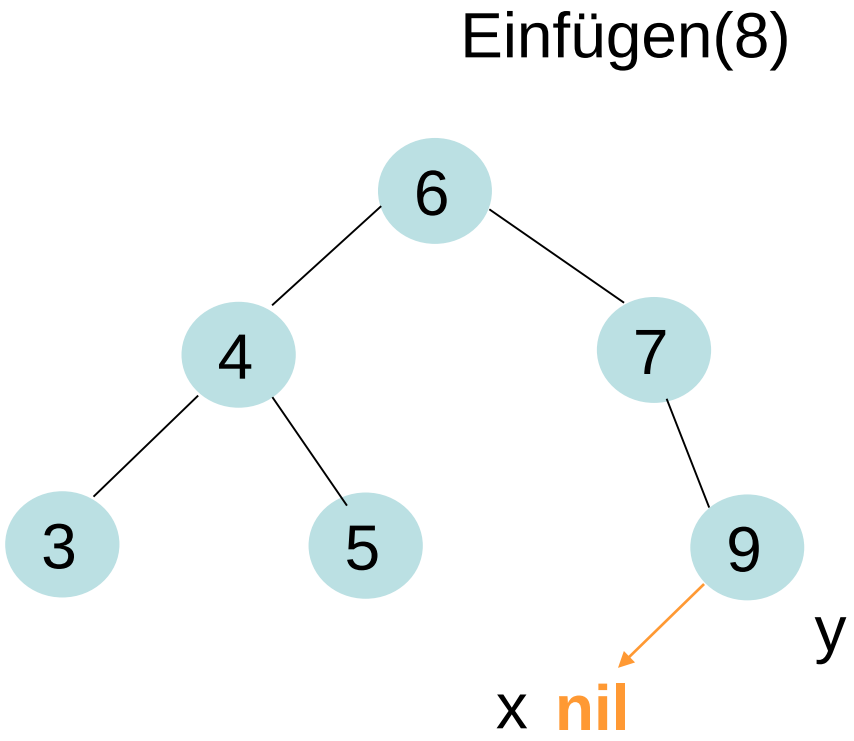
Einfügen(8)



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

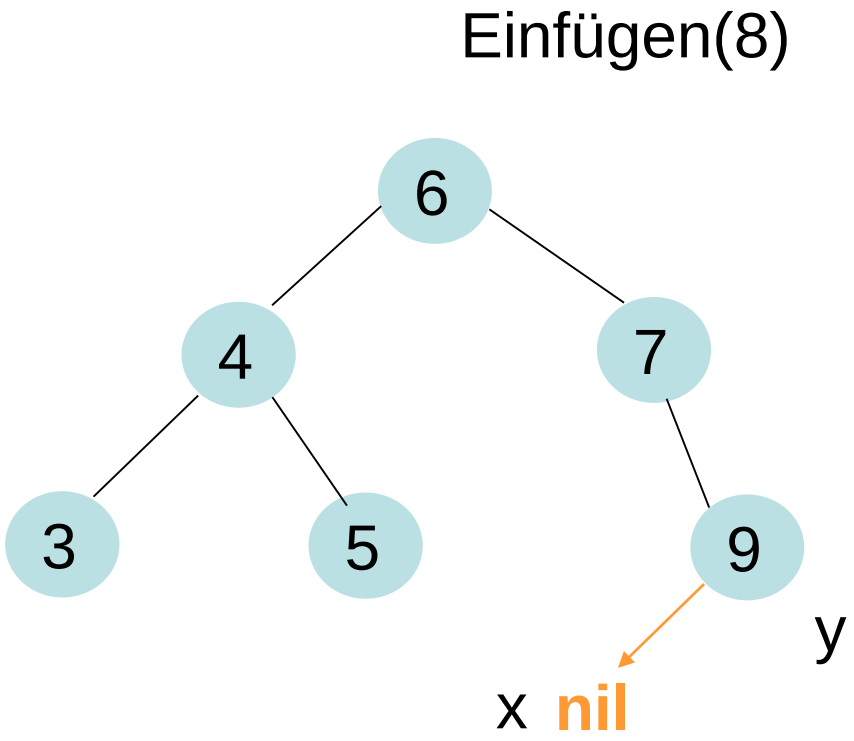
1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

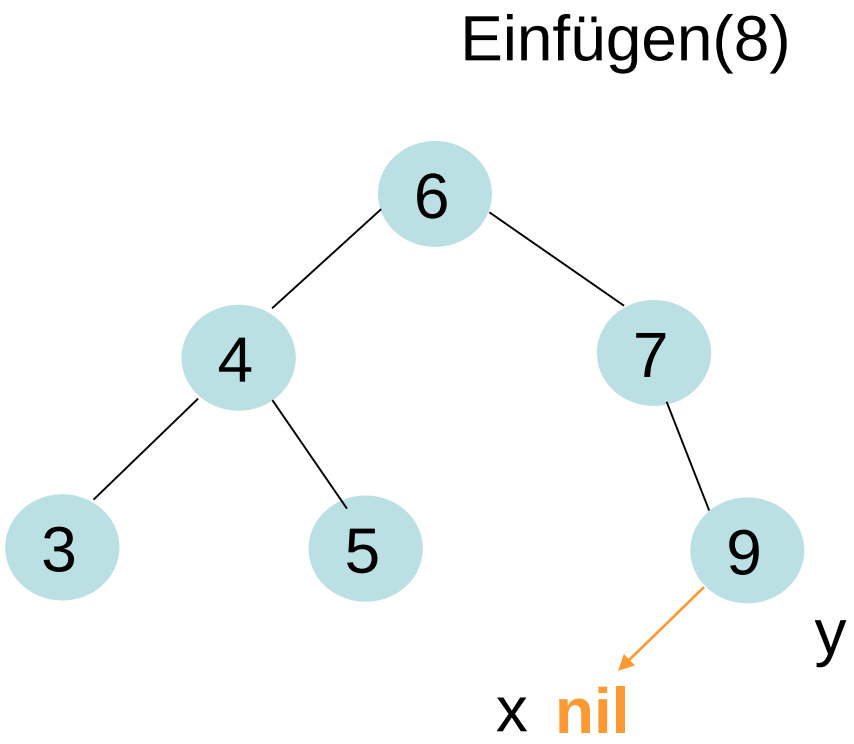
1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

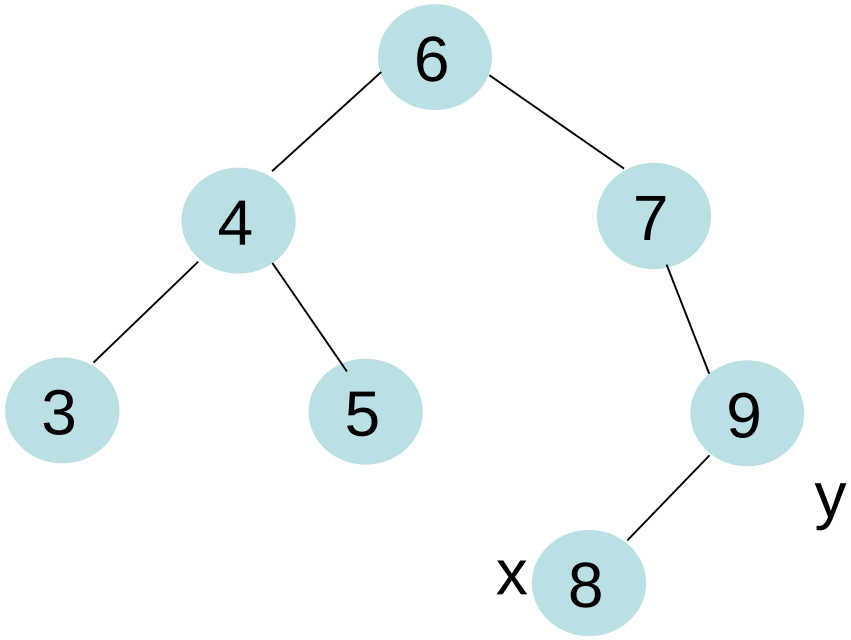


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

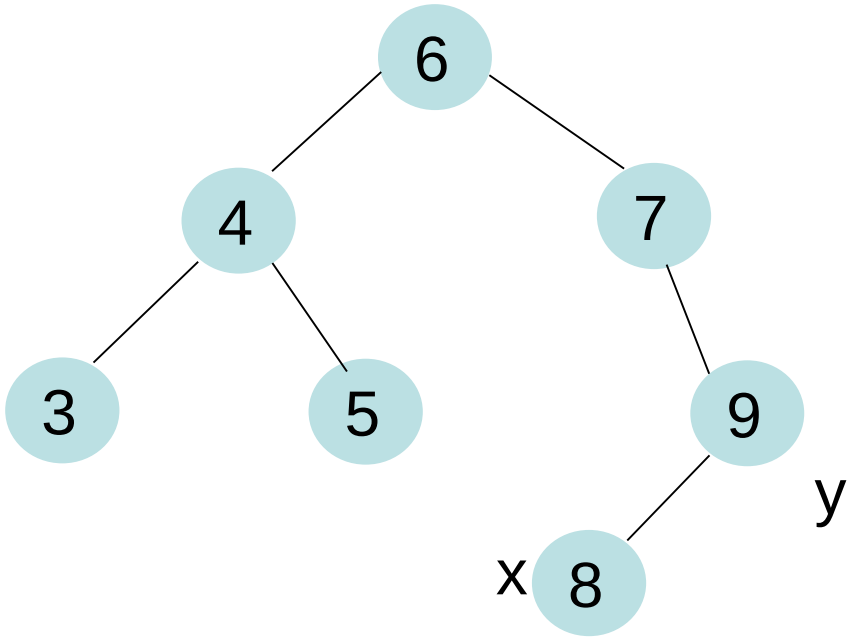


Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)



Binäre Suchbäume

Einfügen(T,z)

1. y← **nil**; x ← root[T]
2. **while** x≠**nil do**
3. y ← x
4. **if** key[z] < key[x] **then** x ← lc[x]
5. **else** x ← rc[x]
6. p[z] ← y
7. **if** y=**nil then** root[T] ← z
8. **else**
9. **if** key[z]< key[y] **then** lc[y] ← z
10. **else** rc[y] ← z

Einfügen(8)

Laufzeit:

O(h)

Binäre Suchbäume

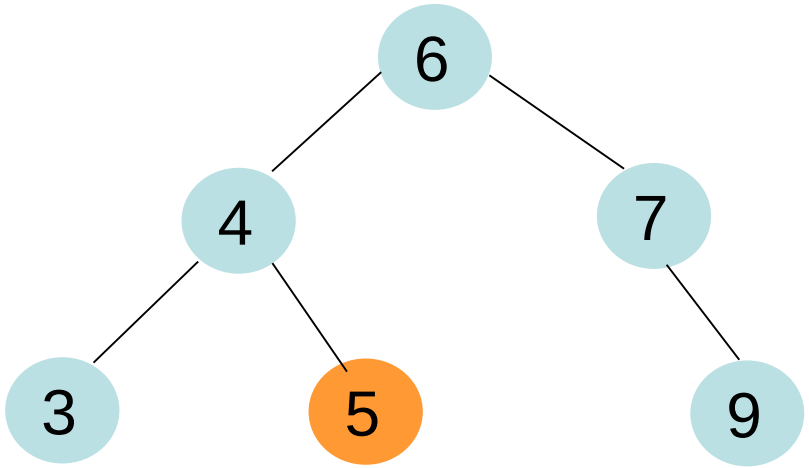
Löschen:

- 3 unterschiedliche Fälle
- (a) zu löschendes Element z hat keine Kinder
- (b) zu löschendes Element z hat ein Kind
- (c) zu löschendes Element z hat zwei Kinder

Binäre Suchbäume

Fall (a):

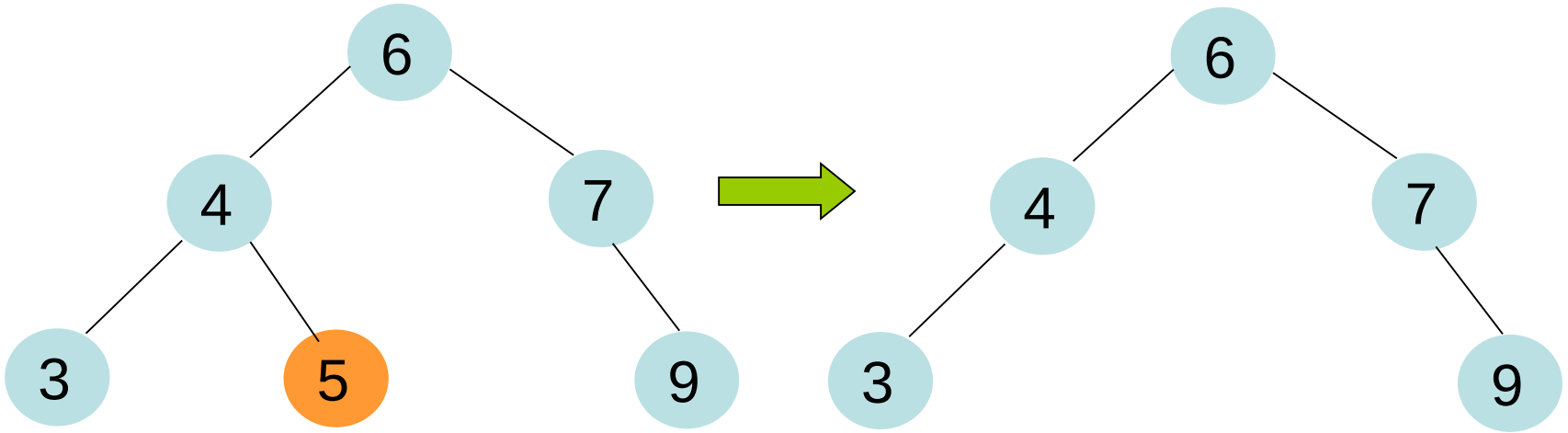
- zu löschendes Element z hat keine Kinder



Binäre Suchbäume

Fall (a):

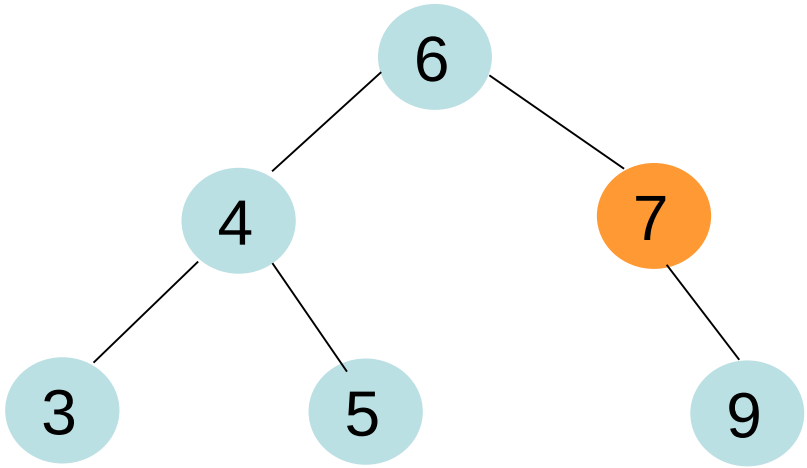
- zu löschendes Element z hat keine Kinder
- Entferne Element



Binäre Suchbäume

Fall (b):

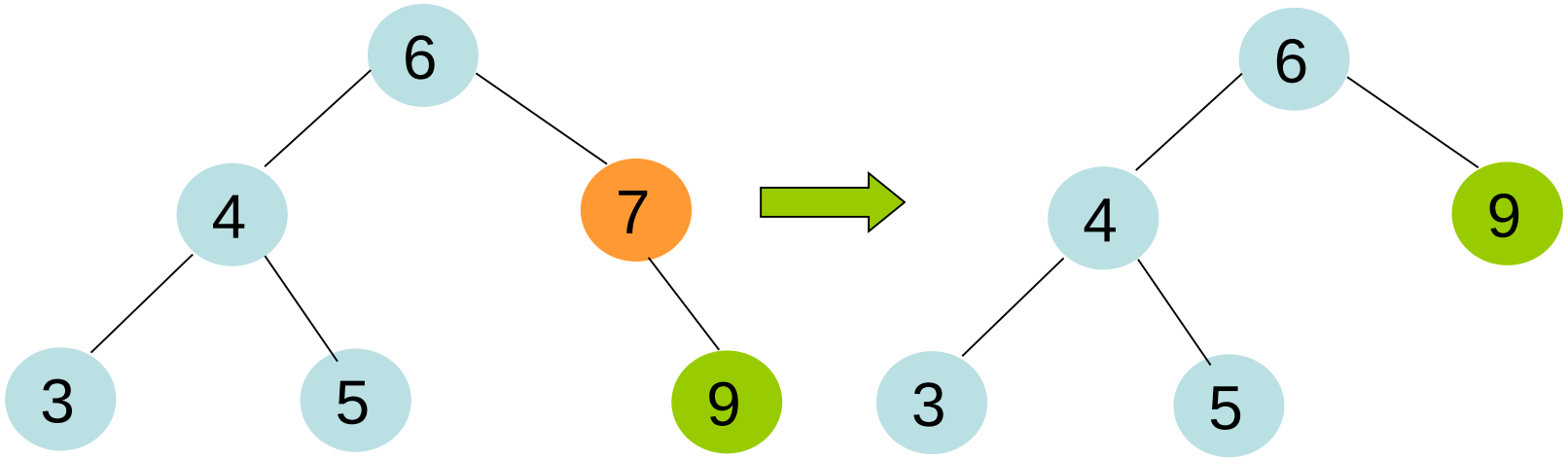
- zu löschendes Element z hat ein Kind



Binäre Suchbäume

Fall (b):

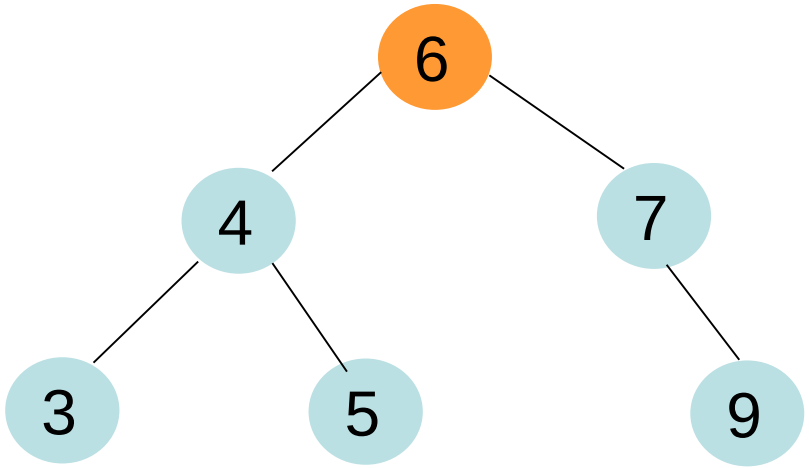
- zu löschendes Element z hat ein Kind
- Hänge der Unterbaum von z an den Vater von z



Binäre Suchbäume

Fall (c):

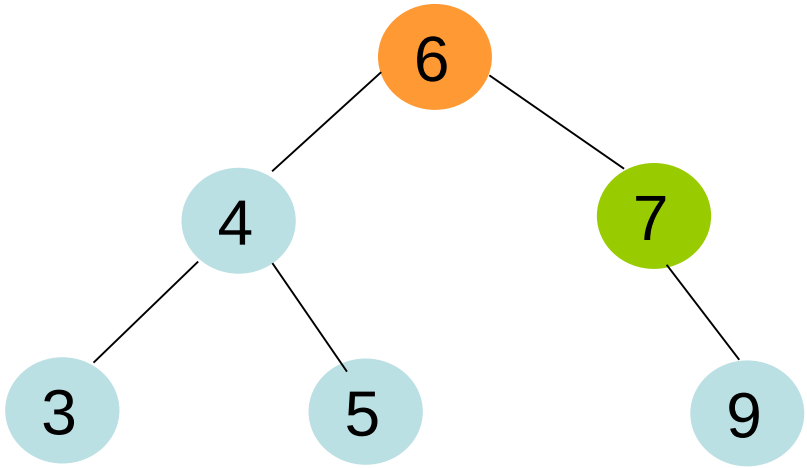
- zu löschendes Element z hat zwei Kinder



Binäre Suchbäume

Fall (c):

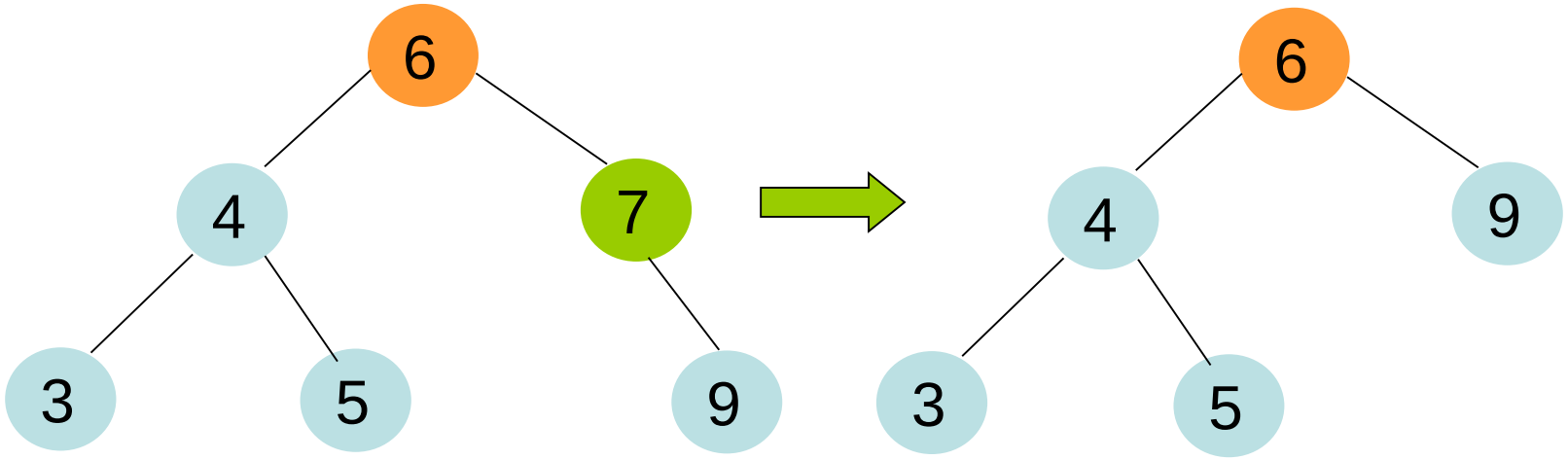
- zu löschendes Element z hat zwei Kinder
- Schritt 1: Bestimme Nachfolger von z



Binäre Suchbäume

Fall (c):

- zu löschendes Element z hat zwei Kinder
- Schritt 1: Bestimme Nachfolger von z
- Schritt 2: Entferne Nachfolger

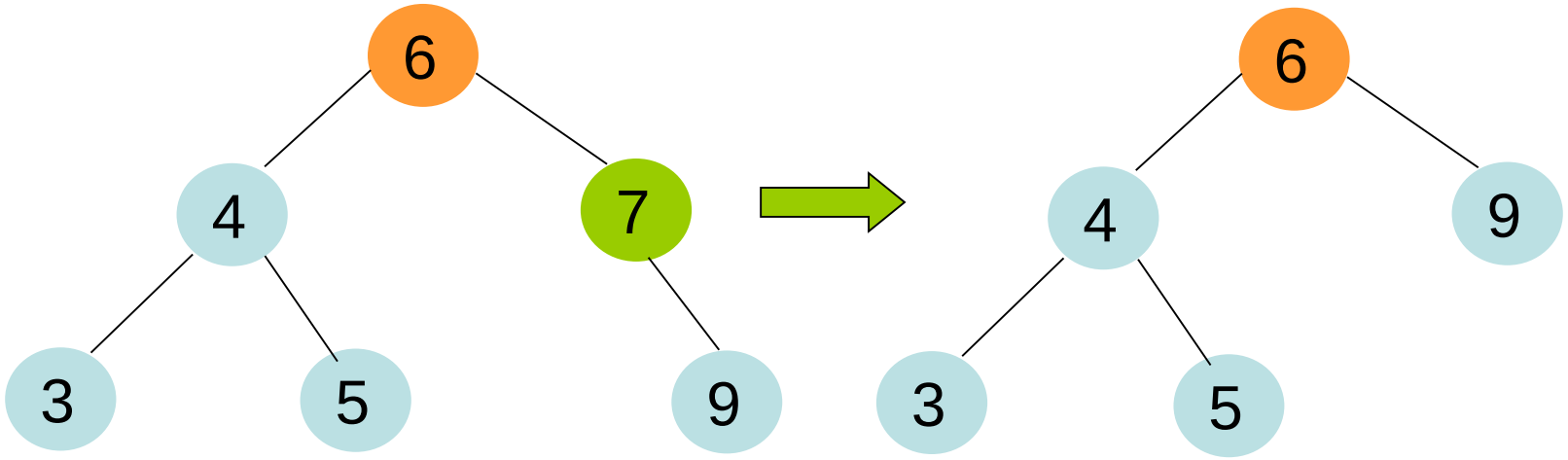


Binäre Suchbäume

Fall (c):

- zu löschendes Element z hat zw
- Schritt 1: Bestimme Nachfolger vo
- Schritt 2: Entferne Nachfolger

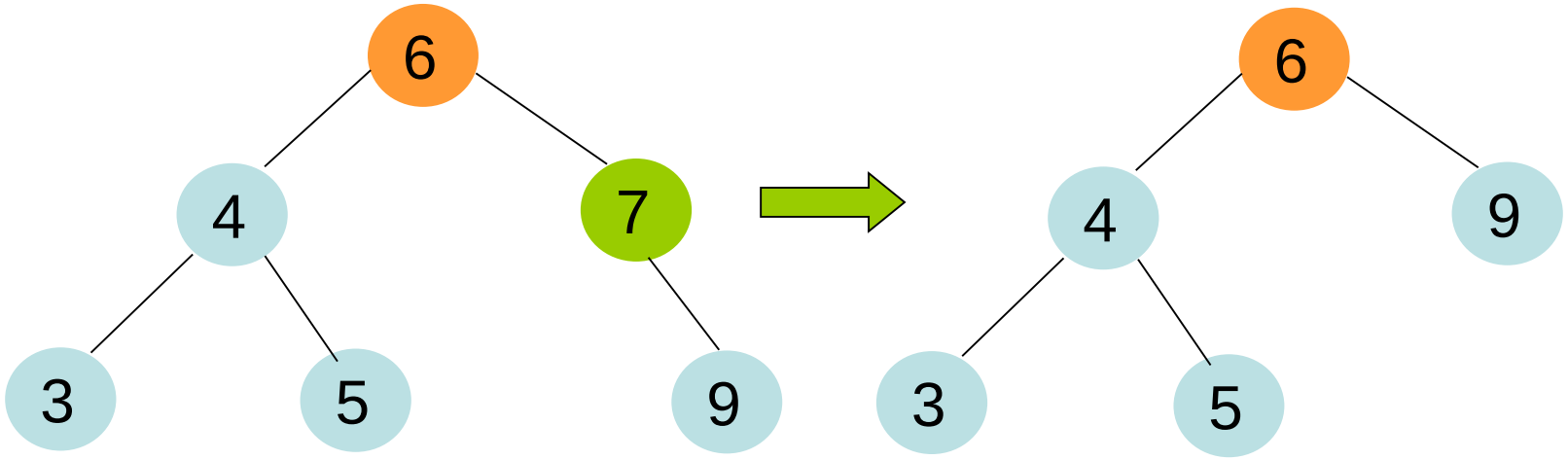
Nachfolger hat nur ein Kind!



Binäre Suchbäume

Nachfolger von z hat nur ein Kind:

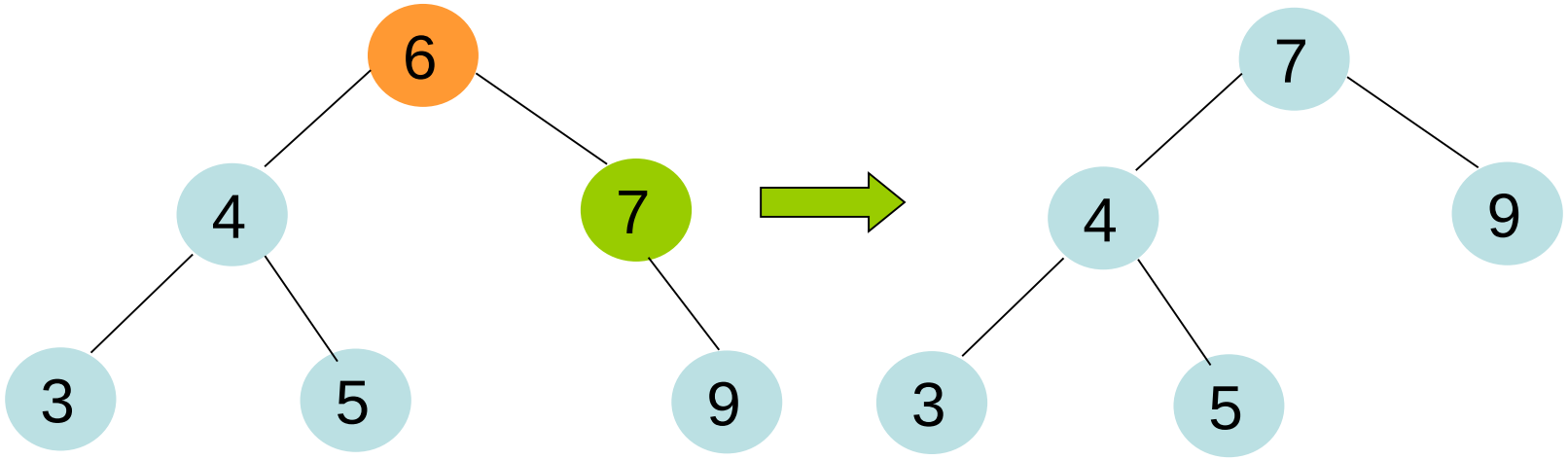
- Nachfolger ist Minimum in Teilbaum mit Wurzel rc[z]
- Dieses Minimum y ist entweder ein Blatt, oder lc[y]=nil.



Binäre Suchbäume

Fall (c):

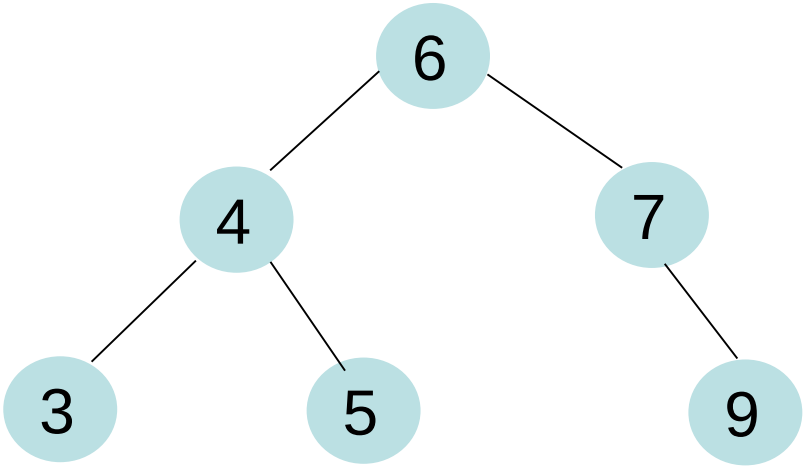
- zu löschendes Element z hat zwei Kinder
- Schritt 1: Bestimme Nachfolger von z
- Schritt 2: Entferne Nachfolger; ersetze z durch Nachfolger



Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

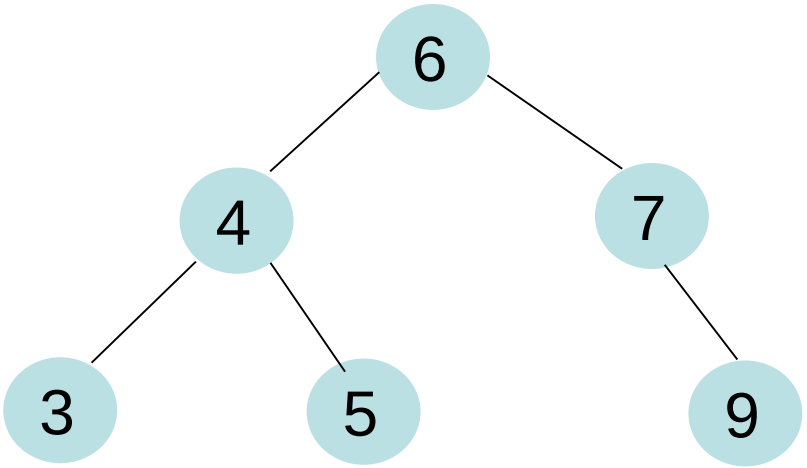


Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Löschen(6)



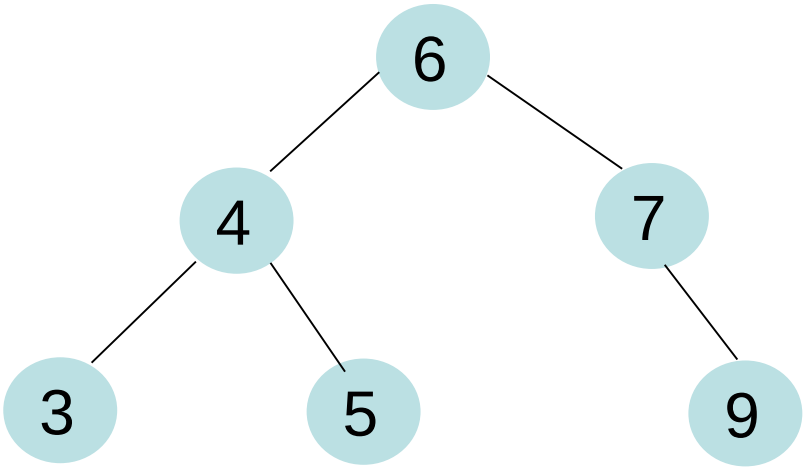
Binäre Suchbäume

Referenz auf z wird übergeben!

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Löschen(6)



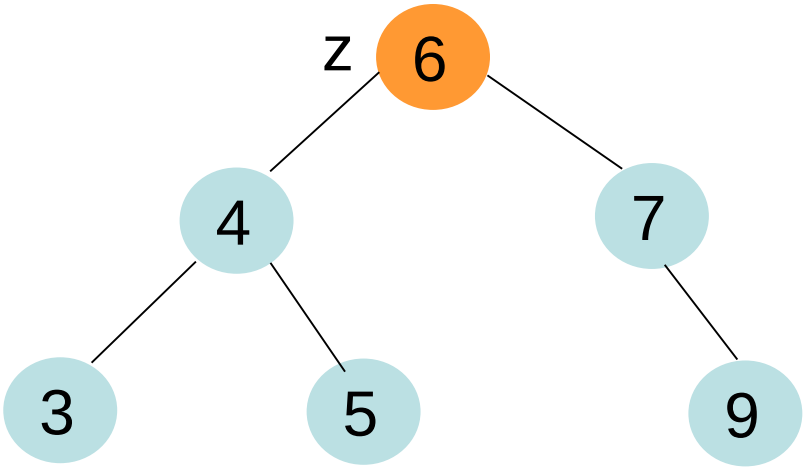
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Bestimme Knoten, der gelöscht werden soll. Der Knoten hat nur ein Kind.

Löschen(6)



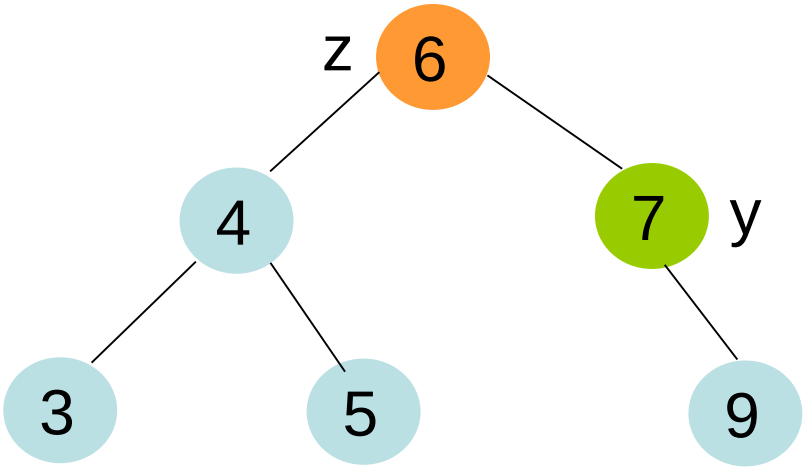
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Bestimme Knoten, der gelöscht werden soll. Der Knoten hat nur ein Kind.

Löschen(6)



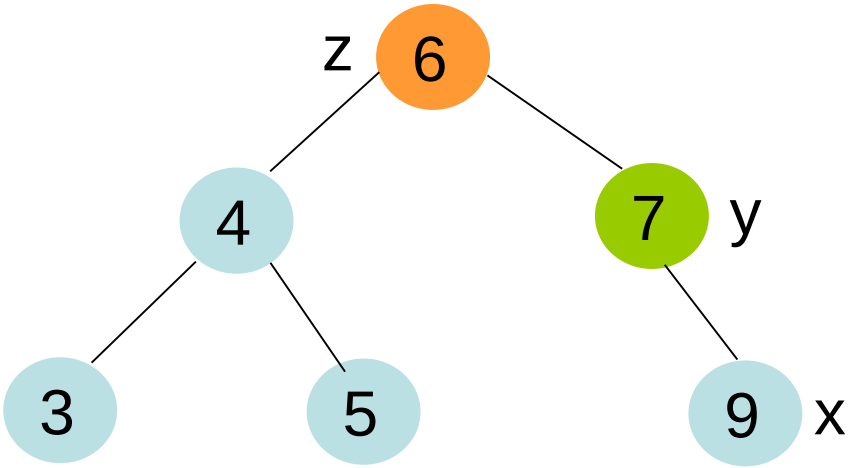
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ←
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Bestimme das Kind von y (falls dieses existiert).

Löschen(6)



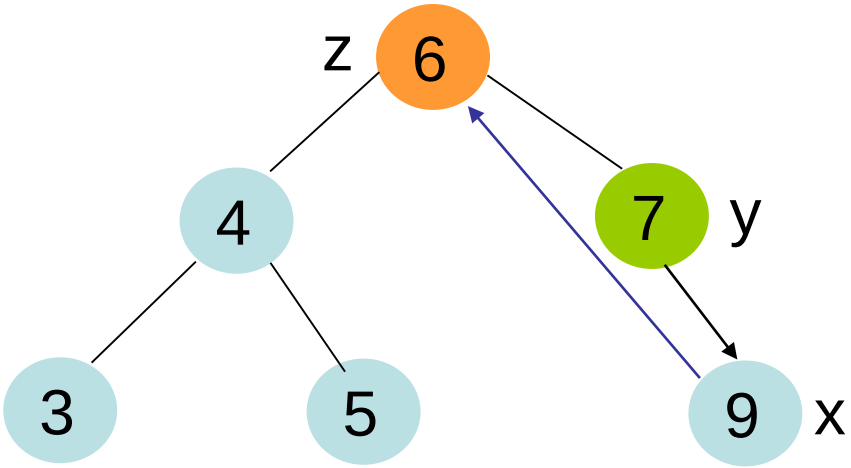
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Aktualisiere Vaterzeiger von x

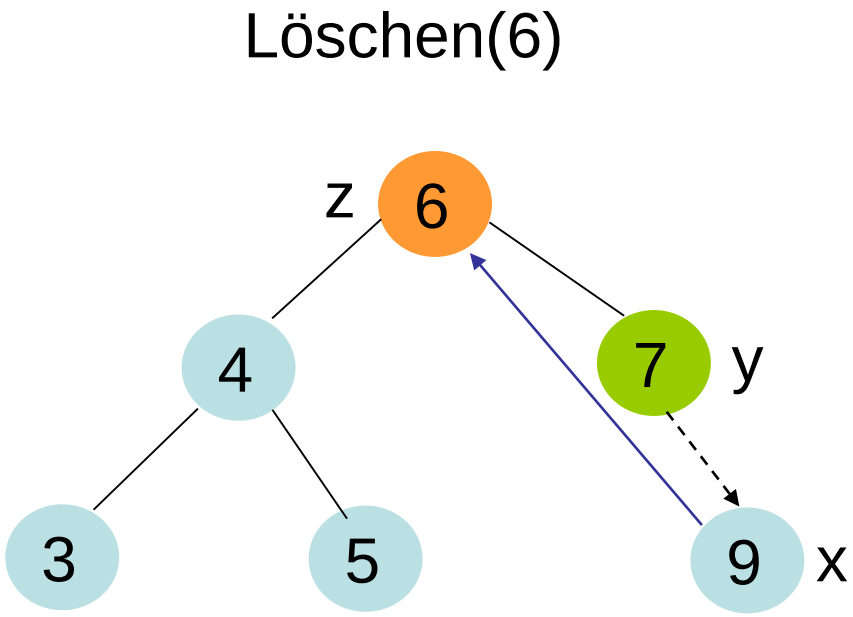
…en(6)



Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y



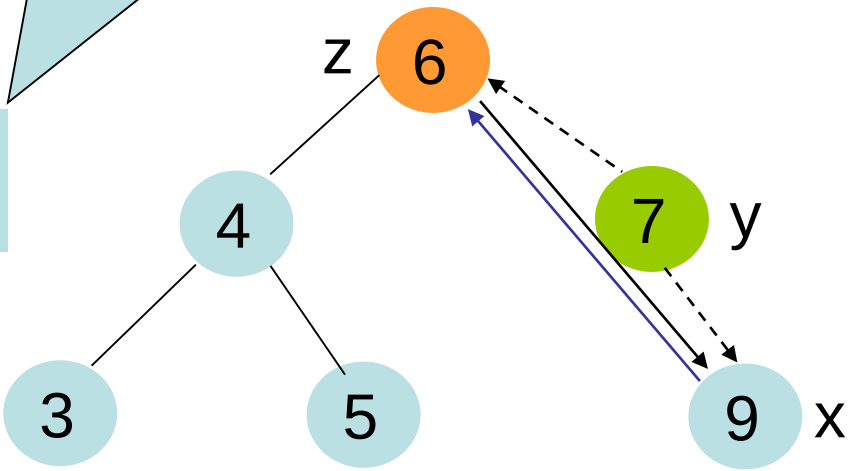
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Beispiel: Das rechte Kind von z wird x.

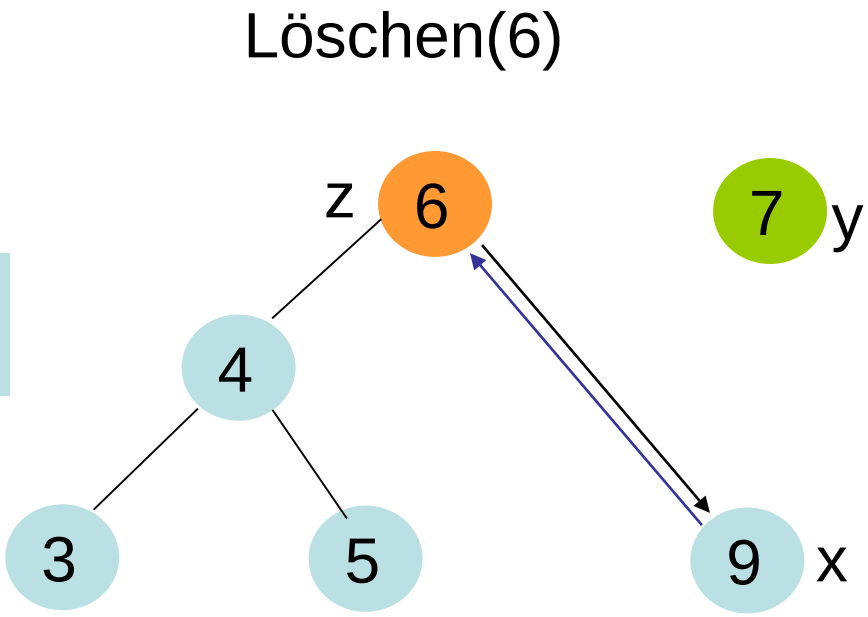
n(6)



Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

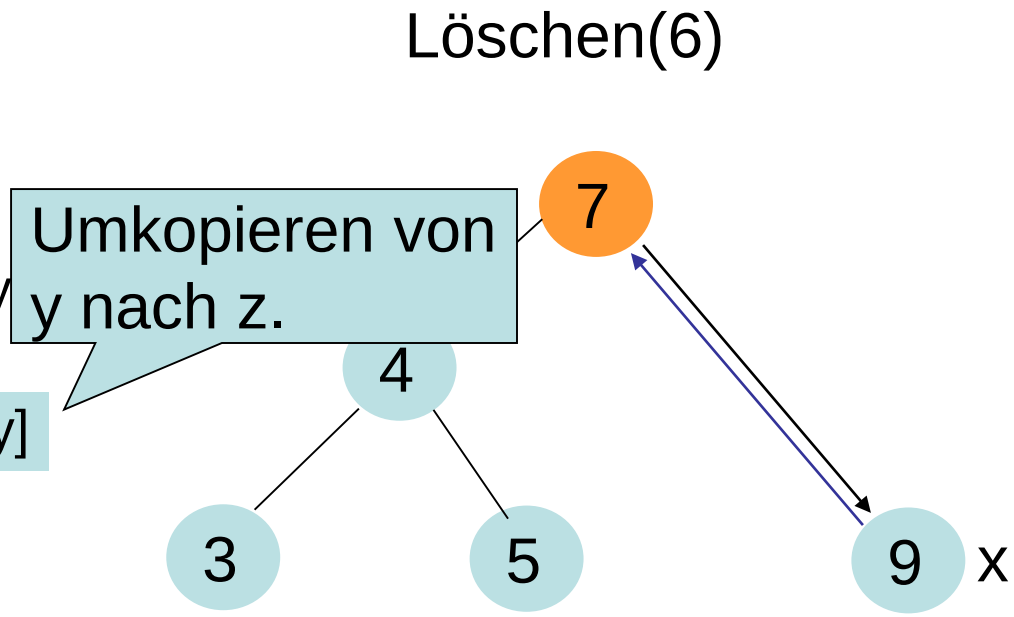
1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y



Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

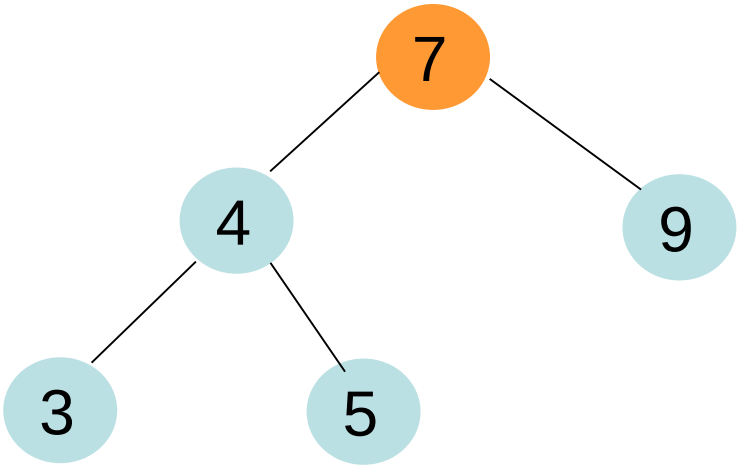


Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Löschen(6)

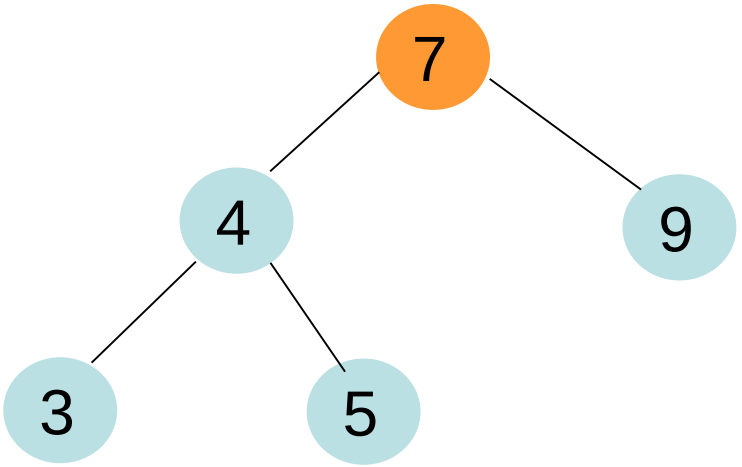


Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Löschen(6)



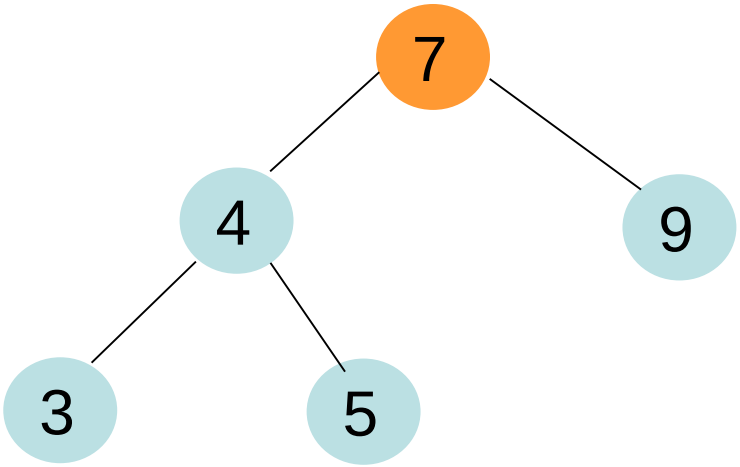
Binäre Suchbäume

Löschen(T,z)

1. **if** lc[z]=**nil** or rc[z]=**nil then** y ← z
2. **else** y ← NachfolgerSuche(z)
3. **if** lc[y] ≠ nil **then** x ← lc[y]
4. **else** x ← rc[y]
5. **if** x ≠ **nil then** p[x] ← p[y]
6. **if** p[y]=**nil then** root[T] ← x
7. **else if** y=lc[p[y]] **then** lc[p[y]] ← x
8. **else** rc[p[y]] ← x
9. **if** y ≠ z **then** key[z] ← key[y]
10. **return** y

Laufzeit O(h)

Löschen(6)



Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume:

- Ausgabe aller Elemente in O(n)
- Suche, Minimum, Maximum, Nachfolger in O(h)
- Einfügen, Löschen in O(h)

Frage:

- Wie kann man eine „kleine“ Höhe unter Einfügen und Löschen garantieren?

Changelog

23.05.16: Folien 72, 123, 124, 128, 129, 130, 133

26.05.16: Folien 131-133 (Pfeile angepasst)