4. Divide & Conquer – Merge-Sort

Definition 4.1: Divide&Conquer (Teile&Erobere) ist eine auf Rekursion beruhende Algorithmentechnik.

Eine Divide&Conquer-Algorithmus löst ein Problem in 3 Schritten:

- Teile ein Problem in mehrere Unterprobleme.
- Erobere jedes einzelne Unterproblem durch rekursive Lösung. Ausnahme sind kleine Unterprobleme, diese werden direkt gelöst.
- Kombiniere die Lösungen der Teilprobleme zu einer Gesamtlösung.

Divide&Conquer und Sortieren

- Teile ein Problem in Unterprobleme.
- Erobere jedes einzelne Teilproblem, durch rekursive Lösung.
- Kombiniere die Lösungen zu einer Gesamtlösung.

- Teile eine *n*-elementige Teilfolge auf in zwei Teilfolgen mit jeweils etwa *n/2* Elementen.
- Sortiere die beiden Teilfolgen rekursiv.
- Mische die sortierten Teilfolgen zu einer sortierten Gesamtfolge.

Merge-Sort

Merge-Sort ist eine mögliche Umsetzung des Divide&Conquer-Prinzips auf das Sortierproblem.

$\text{Merge-Sort}(A,p,r)$

1 **if** $p < r$
2 **then** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3 $\text{Merge-Sort}(A,p,q)$
4 $\text{Merge-Sort}(A,q+1,r)$
5 $\text{Merge}(A,p,q,r)$

- Merge ist Algorithmus zum Mischen zweier sortierter Teilfolgen
- Aufruf zu Beginn mit Merge-Sort(*A*,1,*length*(*A*)).

Illustration von Merge-Sort (1)

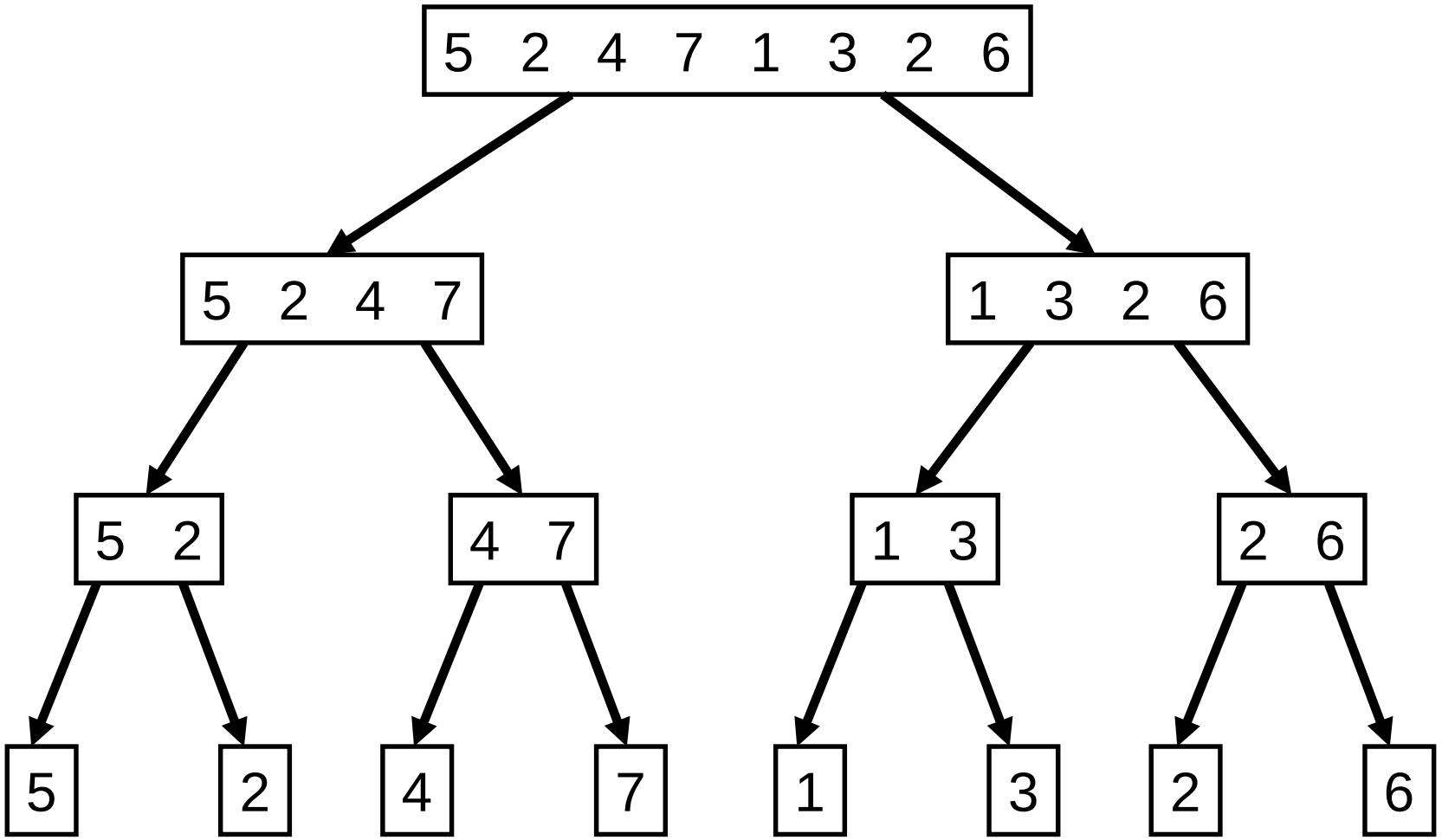
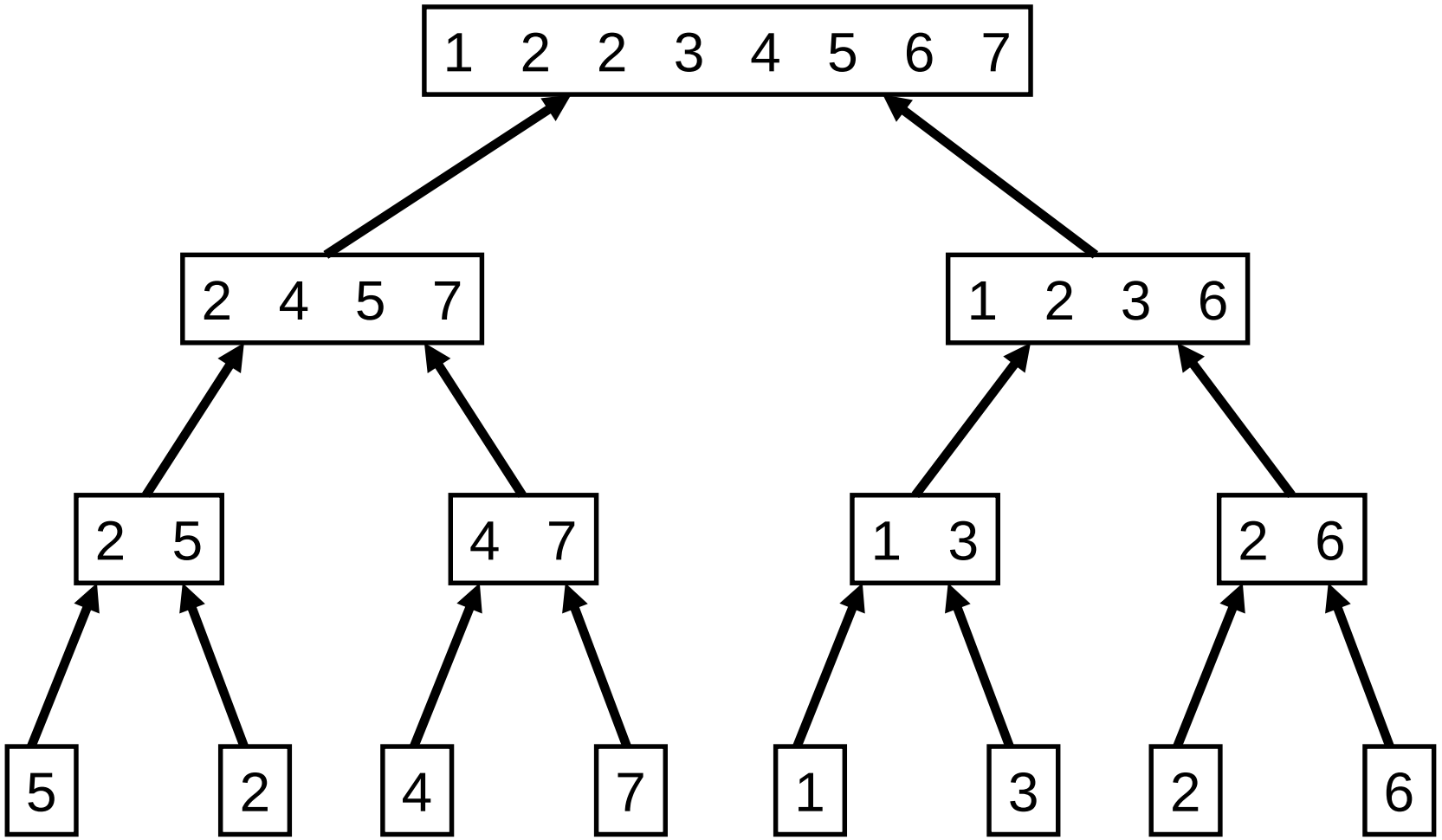


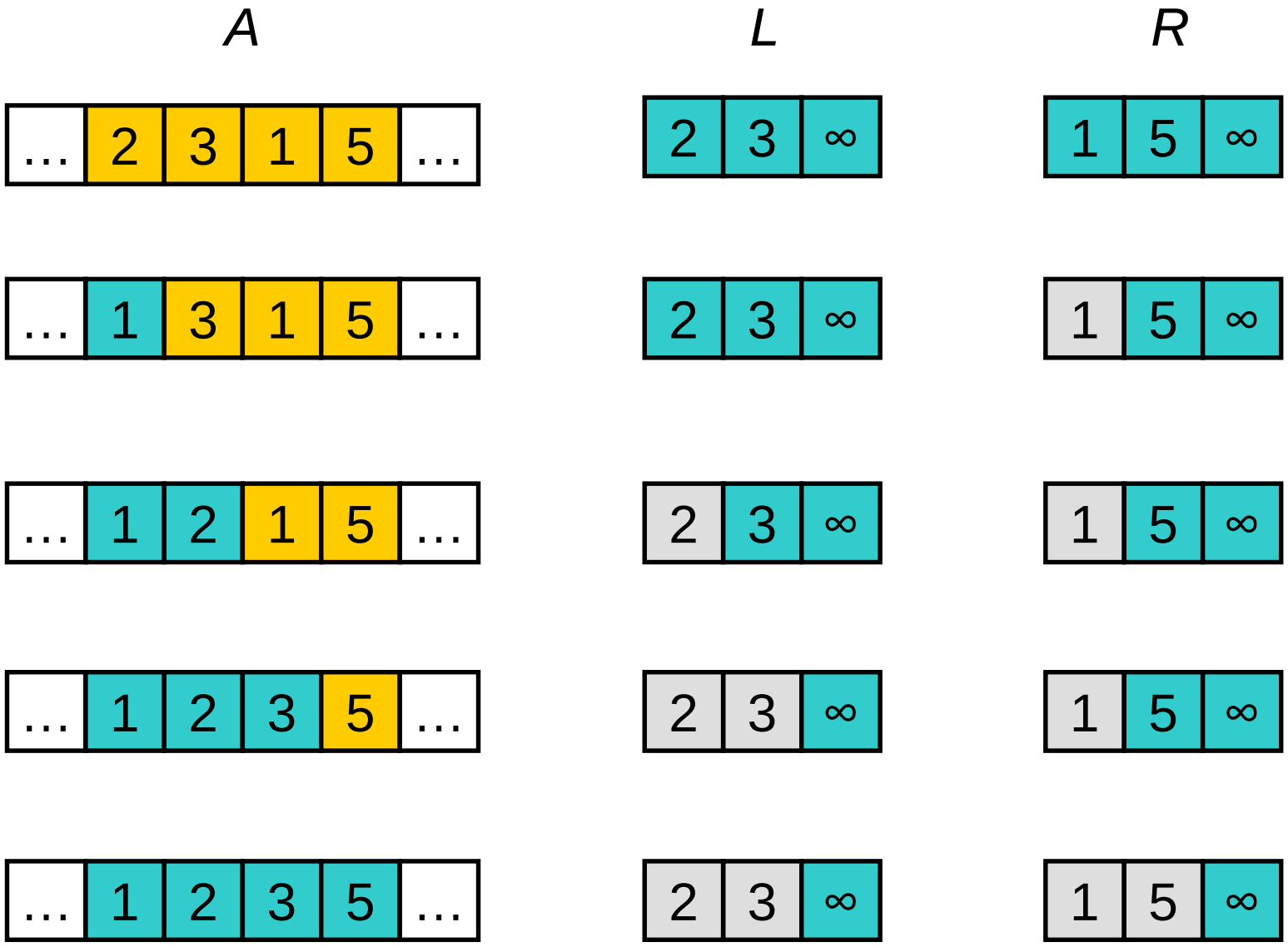
Illustration von Merge-Sort (2)



Kombination von Teilfolgen - Merge

```
Merge(A, p, q, r)
 1  n_1 ← q − p + 1
 2  n_2 ← r − q
 3  ▷ Erzeuge Arrays L[1.. n_1 + 1], R[1.. n_2 + 1]
 4  for i ← 1 to n_1
 5       do L[i] ← A[p + i − 1]
 6  for j ← 1 to n_2
 7       do R[j] ← A[q + j]
 8  L[n_1 + 1] ← ∞
 9  R[n_2 + 1] ← ∞
10  i ← 1
11  j ← 1
12  for k ← p to r
13       do if L[i] ≤ R[j]
14            then A[k] ← L[i]
15                 i ← i + 1
16            else A[k] ← R[j]
17                 j ← j + 1
```

Illustration von Merge



Korrektheit rekursiver Algorithmen

Die Korrektheit rekursiver Algorithmen wie Merge-Sort wird üblicherweise ähnlich zur vollständigen Induktion gezeigt.

Konkret muss gezeigt werden, dass

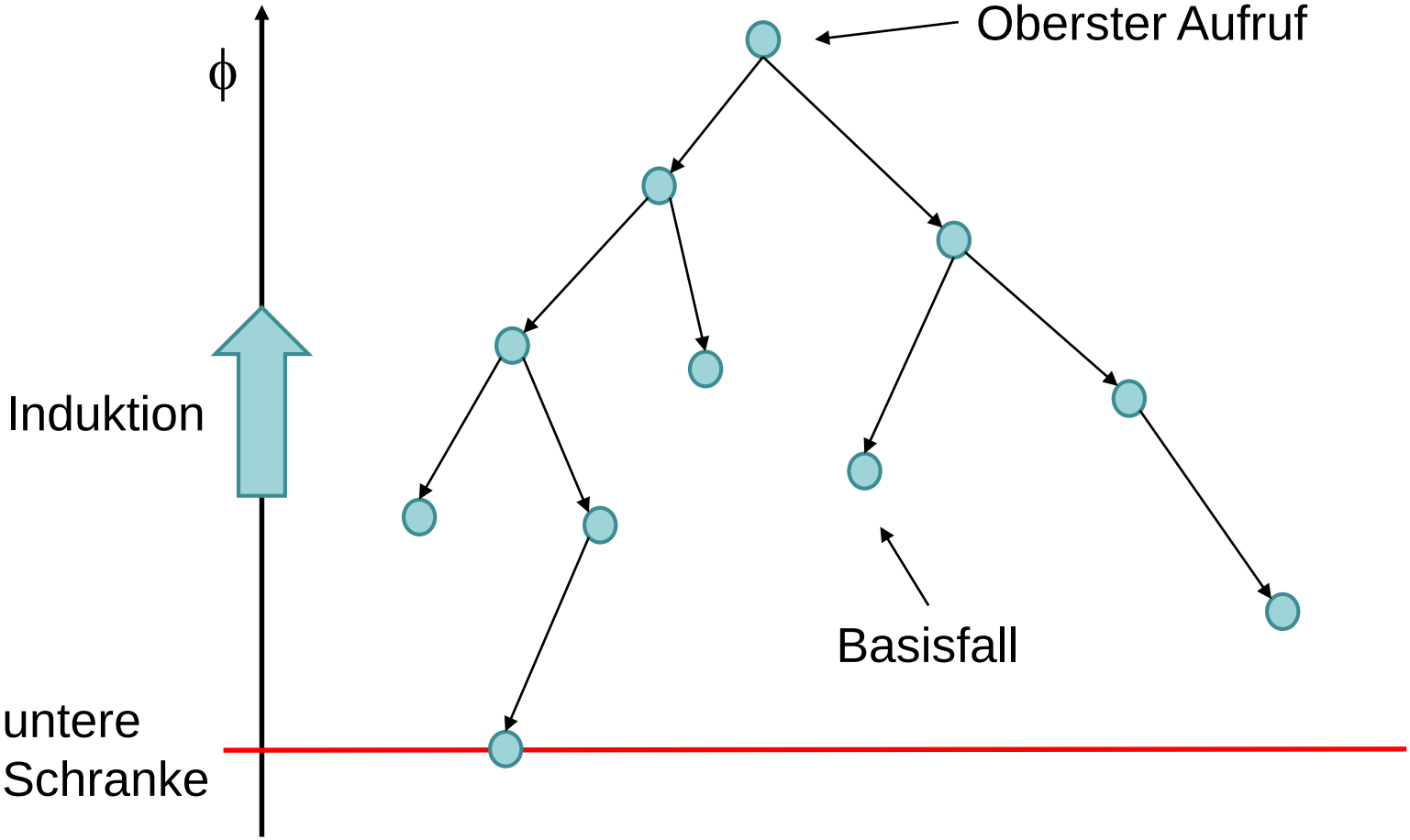
1. der Algorithmus für den Basisfall (keine weiteren rekursiven Aufrufe) korrekt ist (Initialisierung) und
2. falls die rekursiven Aufrufe des Algorithmus korrekt sind, dann auch der aktuell ausgeführte Aufruf korrekt ist (Erhaltung).

Um sicherzustellen, dass die Annahmen in der Erhaltung korrekt sind, muss eine Potenzialfunktion $\phi()$ angegeben werden, die

1. bei jedem rekursiven Aufruf streng monoton sinkt (bzw. steigt),
2. durch den Basisfall nach unten (bzw. oben) hin beschränkt ist und
3. nur endlich viele Werte annehmen kann.

Korrektheit rekursiver Algorithmen

Anschaulich (mon. sinkendes ϕ):



Korrektheit rekursiver Algorithmen

Beispiel: Berechnung der Fakultät

```
Fakultät(n)
  if n=1 then return 1
         else return n*Fakutät(n-1)
```

Behauptung: Fakultät(n)=n!

- Initialisierung: n=1 (keine weiteren rekursiven Aufrufe)
  Fakultät(1) =1=1!
- Erhaltung: Wir nehmen an, dass Fakultät(n-1)=(n-1)!.
  Dann gilt für den Aufruf Fakultät(n):
  Fakultät(n) = n·Fakultät(n-1) = n·(n-1)! = n!

Annahme in der Erhaltung korrekt: betrachte $\phi(n)=n$.

- Initialisierung: $\phi(1)=1$
- Erhaltung: $\phi(n)>1$und ϕ wird bei rek. Aufruf um 1 vermindert

D.h. ϕ sinkt streng monoton, ist nach unten durch 1 beschränkt und kann (da n ganzzahlig ist) nur endlich viele Werte annehmen.

Korrektheit von Merge - Sort

Behauptung: Merge-Sort(A,p,r) sortiert A[p,…,r]
Initialisierung: $p \geq r$.
Erhaltung: $p<r$, und bei jedem Aufruf wird $r-p$ um mindestens 1 auf einen nichtnegativen Wert reduziert.
Also geeignete Wahl von $\phi(A,p,r)$: $\phi(A,p,r) = r-p$

$\text{Merge-Sort}(A,p,r)$

1 **if** $p < r$
2 **then** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3 $\text{Merge-Sort}(A,p,q)$
4 $\text{Merge-Sort}(A,q+1,r)$
5 $\text{Merge}(A,p,q,r)$

Korrektheit von Merge - Sort

Behauptung: Merge-Sort(A,p,r) sortiert A[p…r]
Initialisierung: Für p≥r ist A[p…r] trivialerweise sortiert
Erhaltung: Nach den rekursiven Aufrufen sind A[p…q] und A[q+1…r] sortiert. Mischt also Merge(A,p,q,r) A[p…q] und A[q+1…r] korrekt zu einer sortierten Folge, ist dann auch A[p…r] sortiert.

$\text{Merge-Sort}(A,p,r)$

1 **if** $p < r$
2 **then** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3 $\text{Merge-Sort}(A,p,q)$
4 $\text{Merge-Sort}(A,q+1,r)$
5 $\text{Merge}(A,p,q,r)$

Korrektheit von Merge - Invariante

Lemma 4.2: Erhält Algorithmus Merge(A,p,q,r) als Eingabe ein Teilarray $A[p \ldots r]$, so dass die beiden Teilarrays $A[p \ldots q]$ und $A[q+1 \ldots r]$ sortiert sind, so ist nach Durchführung von Merge das Teilarray $A[p \ldots r]$ ebenfalls sortiert.

Schleifeninvariante I(k): Array $A[p \ldots k\text{-}1]$ enthält die $k\text{-}p$ kleinsten Zahlen aus den Arrays L und R in sortierter Reihenfolge.

Korrektheit von Merge – 3 Schritte

Initialisierung: Vor der Schleife gilt offensichtlich I(p)
und damit auch I(k) für k=p.

Erhaltung:

• Angenommen, I(k) gilt zu Anfang des Schleifendurchlaufs.

• Sei o.B.d.A. $L[i] \leq R[j]$. Dann ist $L[i]$ das kleinste noch nicht einsortierte Element. Nach Ausführung der Zeilen 14-15 enthält $A[p..k]$ die $k-p+1$ kleinsten Elemente. Zusammen mit Erhöhung der Zähler i,k garantiert dies, dass am Ende der Schleife I(k+1) gilt.

Terminierung: Nach Ende der Schleife enthält $A[p..r]$ die $r-p+1$ kleinsten Elemente in sortierter Reihenfolge. Also sind dann alle Elemente sortiert.

Korrektheit von Merge – Formal

```
Merge(A,p,q,r)
1       n1←q-p+1
2       n2←r-q
3       for i←1 to n1 do
4           L[i]←A[p+i-1]
5       for j←1 to n2 do
6           R[j]←A[q+j]
7       L[n1+1]←∞
8       R[n2+1]←∞
9       i←1;j←1
        ▷ I(p)
10      for k←p to r do
            ▷ I(k)
11          if L[i]≤R[j] then
                ▷ I(k) ∧ L[i]≤R[j]
12              A[k]←L[i]; i←i+1
                ▷ I(k+1)
13          else
                ▷ I(k) ∧ L[i]>R[j]
14              A[k]←R[j]; j←j+1
                ▷ I(k+1)
        ▷ I(r+1), d.h. A[p…r] ist sortiert
```

Laufzeit von Merge

Lemma 4.3: Ist die Eingabe von Merge ein Teilarray der Größe n, so ist die Laufzeit von Merge $\Theta(n)$.

$\text{Merge}(A, p, q, r)$	Cost	Zeit
1 $n_1 \leftarrow q - p + 1$	c_1	1
2 $n_2 \leftarrow r - q$	c_2	1
3 for $i \leftarrow 1$ to n_1	c_3	n_1+1
4 do $L[i] \leftarrow A[p + i - 1]$	c_4	n_1
5 for $j \leftarrow 1$ to n_2	c_5	n_2+1
6 do $R[j] \leftarrow A[q + j]$	c_6	n_2
7 $L[n_1 + 1] \leftarrow \infty$	c_7	1
8 $R[n_2 + 1] \leftarrow \infty$	c_8	1
9 $i \leftarrow 1$	c_9	1
10 $j \leftarrow 1$	c_{10}	1
11 for $k \leftarrow p$ to r	c_{11}	r-p+2
12 do if $L[i] \leq R[j]$	c_{12}	r-p+1
13 then $A[k] \leftarrow L[i]$	c_{13}	t_1
14 $i \leftarrow i + 1$	c_{14}	t_1
15 else $A[k] \leftarrow R[j]$	c_{15}	t_2
16 $j \leftarrow j + 1$	c_{16}	t_2

Entweder then oder else-Fall

t_1+t_2=r-p+1

Laufzeit von D&C-Algorithmen

Allgemeiner Ansatz:

- $T(n)$: Gesamtlaufzeit bei Eingabegröße n
- a: Anzahl der Teilprobleme durch Teilung
- n/b: Größe der Teilprobleme
- $D(n)$: Zeit für die Teilung (Divide)
- $C(n)$: Zeit für die Kombinierung
- $n \leq u$: Basisfall für Algorithmus, für den dieser Laufzeit $\leq c$ hat

Dann gilt:

$$T(n) \leq \begin{cases} c & \text{falls } n \leq u \\ a \cdot T(n/b) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

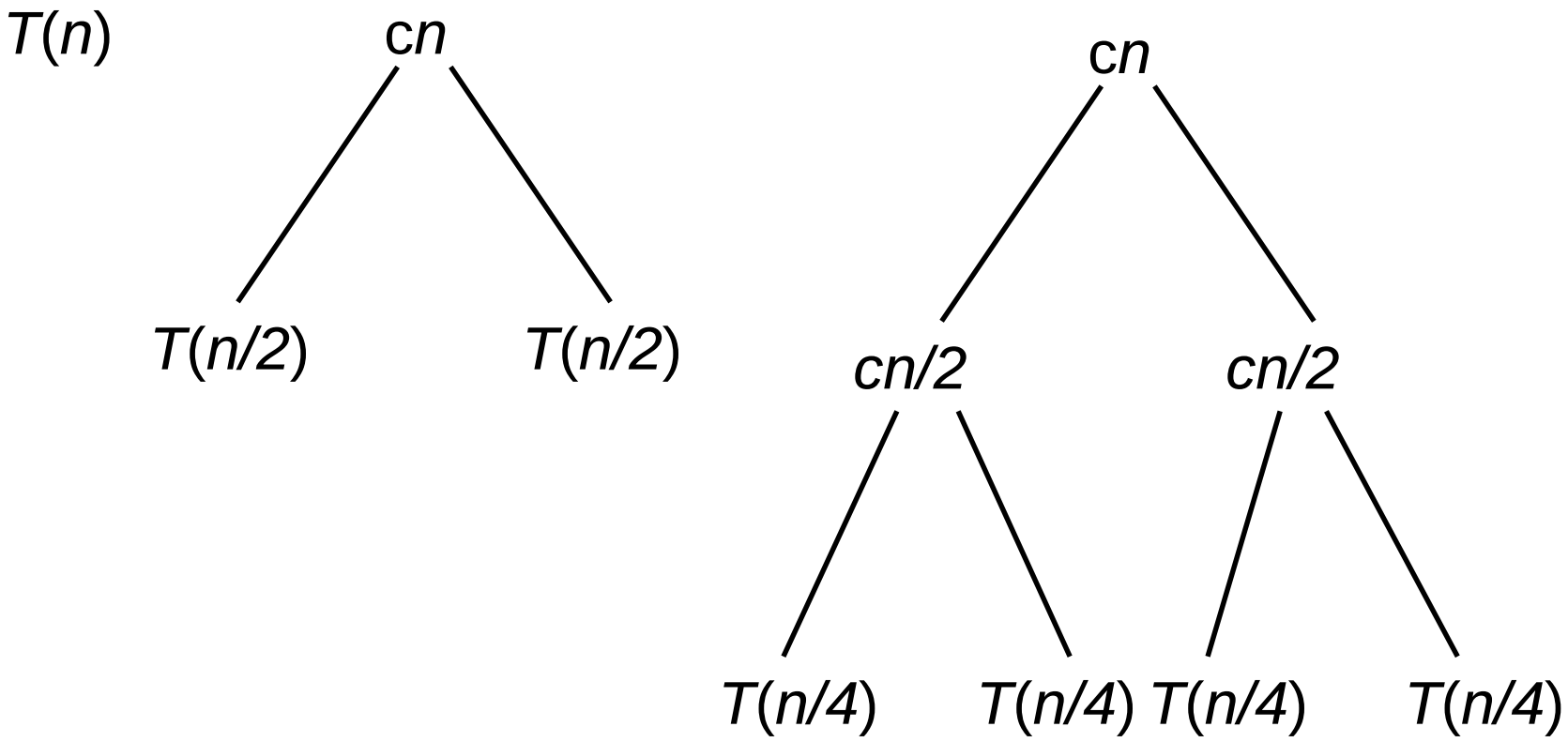
Laufzeit von Merge-Sort (1)

- $u = 1, a = 2, b \approx 2.$
- $D(n) = \Theta(1), C(n) = \Theta(n)$ (Lemma 4.3).
- Sei c so gewählt, dass eine Zahl in Zeit c sortiert werden kann und $D(n) + C(n) \leq cn$ gilt.

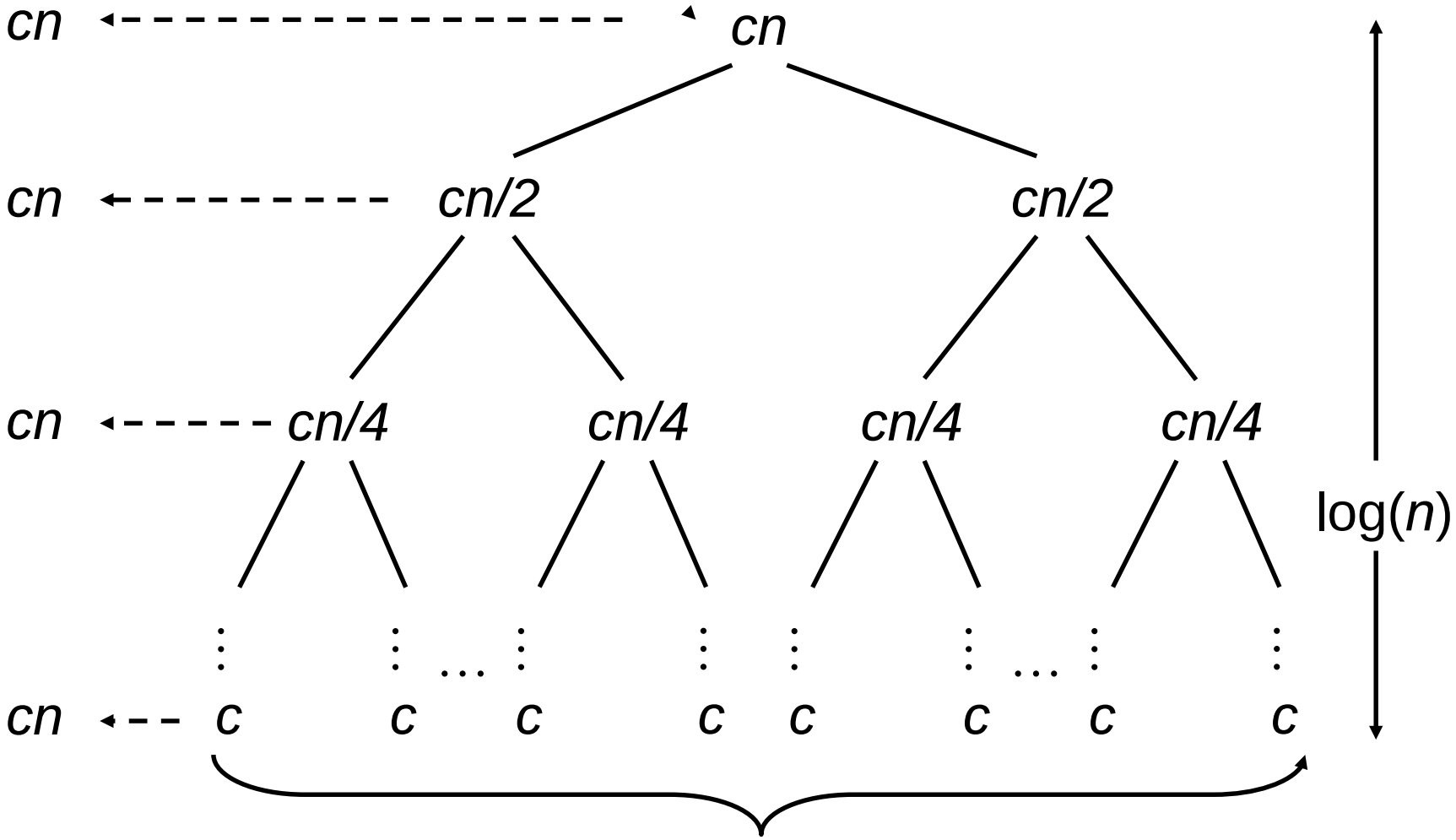
Lemma 4.4: Für die Laufzeit $T(n)$ von Merge-Sort gilt:

$$T(n) \leq \begin{cases} c & \text{falls } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{sonst} \end{cases}$$

Laufzeit von Merge-Sort (2)



Laufzeit von Merge-Sort (4)



Zusammen: $cn \log(n)+cn$

Laufzeit von Merge-Sort (3)

Satz 4.5: Merge-Sort besitzt Laufzeit $\Theta(n\log(n))$.

Zum Beweis wird gezeigt:

1. Es gibt ein c_2, so dass die Laufzeit von Merge-Sort bei allen Eingaben der Größe n immer höchstens $c_2 n\log(n)$ ist.

2. Es gibt ein c_1, so dass für alle n eine Eingabe I_n der Größe n existiert bei der Merge-Sort mindestens Laufzeit $c_1 n\log(n)$ besitzt.

Laufzeit von Merge-Sort (4)

Eingabegröße n

Laufzeit	10	100	1,000	10,000	100,000
n^2	100	10,000	1,000,000	100,000,000	10,000,000,000
n log n	33	664	9,965	132,877	166,096

Beobachtung:

- n^2 wächst viel stärker als n log n
- Selbst bei großen Konst. wäre MergeSort schnell besser
- Konstanten spielen kaum eine Rolle
  $\rightarrow$ Θ-Notation ist entscheidend für große n

Average-Case Laufzeit

Average-case Laufzeit:

- Betrachten alle Permutationen der *n* Eingabezahlen.
- Berechnen für jede Permutation Laufzeit des Algorithmus bei dieser Permutation.
- Average-case Laufzeit ist dann der Durchschnitt über all diese Laufzeiten.

Definition 4.6: Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst.

Alternativ: Eine Permutation ist eine Anordnung der Elemente einer endlichen Menge in einer geordneten Folge.

Average-Case Laufzeit

Lemma 4.7: Zu einer n-elementigen Menge gibt es genau $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ Permutationen.

Beweis: Induktion über *n*.

(I.A.) *n*=1 klar.

(I.V.) Der Satz gilt für *n*.

(I.S.) *n*+1: An letzter Stelle steht die *i*-te Zahl. Es gibt *n!* unterschiedliche Anordnungen der restlichen *n* Zahlen. Da *i* jeden Wert zwischen 1 und *n*+1 annehmen kann, gibt es (*n*+1) *n!* = (*n*+1)*!* Anordnungen der *n*+1 Zahlen.

Beispiel: Menge $\{2,3,6\}$

Permutationen : $(2,3,6),(2,6,3),(3,2,6),(3,6,2),$
$(6,2,3),(6,3,2).$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.8 (Wahrscheinlichkeitsraum):

Ein Wahrscheinlichkeitsraum S ist Menge von Elementarereignissen. Ein Elementarereignis kann als der Ausgang eines (Zufalls)experiments betrachtet werden.

Beispiel:

- Münzwurf mit zwei unterscheidbaren Münzen
- Ergebnis dieses Münzwurfs können wir als Zeichenkette der Länge 2 über {K,Z} (Kopf, Zahl) darstellen
- Wahrscheinlichkeitsraum ist S={KK,KZ,ZK,ZZ}
- Elementarereignisse sind also die möglichen Ausgänge des Münzwurfs

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.9 (Ereignis):

Ein Ereignis ist eine Untermenge eines Wahrscheinlichkeits-raums. (Diese Definition ist etwas vereinfacht, aber für unsere Zwecke ausreichend)

Beispiel:

- {KK, KZ, ZK} ist das Ereignis, dass bei unserem Münzwurf mindestens eine Münze Kopf zeigt

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.10(Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Pr[] auf einem Wahrscheinlichkeitsraum S ist eine Abbildung der Ereignisse von S in die reellen Zahlen, die folgende Axiome erfüllt:

1. $\Pr[A] \geq 0$ für jedes Ereignis A
2. $\Pr[S]=1$
3. $\Pr[A \cup B] = \Pr[A]+\Pr[B]$ für alle Ereignisse A,B mit $A \cap B=\varnothing$

Pr[A] bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A

Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel:

- Bei einem fairen Münzwurf haben wir Pr[A] = 1/4 für jedes Elementarereignis $A \in \{KK,KZ,ZK,ZZ\}$
- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis {KK,KZ,ZK} („mindestens eine Münze zeigt Kopf“) ist

  $Pr[\{KK,KZ,ZK\}] = Pr[KK] + Pr[KZ] + Pr[ZK] = ¾$

Bemerkung:

Eine Verteilung, bei der jedes Elementarereignis aus S dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, nennen wir auch Gleichverteilung über S.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Abhängigkeiten:

- Was passiert, wenn man schon etwas über den Ausgang eines Zufallsexperiments weiß?

Frage:

- Jemand hat beobachtet, dass der Ausgang des Münzwurfs mit zwei Münzen mindestens einmal Kopf zeigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zweimal Kopf?

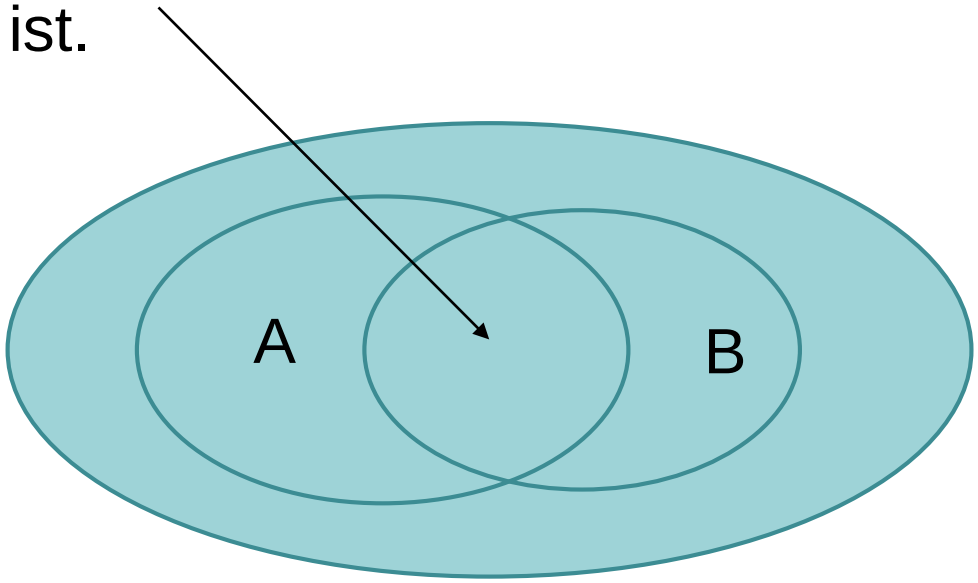
Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.11 (bedingte Wahrscheinlichkeit):

Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass Ereignis B auftritt, ist

$$Pr[A \mid B] = Pr[A \cap B] / Pr[B],$$

wenn $Pr[B] \neq 0$ ist.



Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel:

- Jemand beobachtet den Ausgang unseres Münzwurfexperiments und sagt uns, dass es mindestens einmal Zahl gibt
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für zweimal Zahl (Ereignis A) unter dieser Beobachtung (Ereignis B)?
- $Pr[A|B] = (1/4) /(3/4) =1/3$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.12 (Zufallsvariable):

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in die reellen Zahlen.

Bemerkung:

- Eine Zufallsvariable liefert uns zu jedem Ausgang eines Zufallsexperiments einen Wert

Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel:

- Wurf zweier Münzen
- Sei X Zufallsvariable für die Anzahl Münzen, die Zahl zeigen
- X(KK)=0, X(KZ)=1, X(ZK)=1, X(ZZ)=2

Wahrscheinlichkeitstheorie

Für Zufallsvariable X und reelle Zahl x können wir das Ereignis X=x definieren als $\{s \in S : X(s)=x\}$. Damit gilt:

$$\Pr[X=x] = \Pr[\{s \in S : X(s)=x\}]$$

Beispiel:

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei zwei Münzwürfen genau einen Kopf erhalten?
- $\Pr[X=1] = \Pr[\{KZ, ZK\}] = \Pr[KZ]+\Pr[ZK] = ½$
  (bei derselben Definition von X wie auf der letzten Folie)

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 4.13 (Erwartungswert):

- Der Erwartungwert einer Zufallsvariable ist definiert als

$$E[X] = \sum x \cdot Pr[X=x]$$

Interpretation:

- Der Erwartungswert gibt den „durchschnittlichen“ Wert der Zufallsvariable an, wobei die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse berücksichtigt werden

Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel:

- Erwartete Anzahl „Kopf“ bei 2 Münzwürfen
- $E[X] = 0 \cdot Pr[X=0] + 1 \cdot Pr[X=1] + 2 \cdot Pr[X=2]$
  $= 0 + ½ + 2 \cdot ¼$
  $= 1$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Linearität des Erwartungswerts:

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Bemerkung:

- Eine der wichtigsten Formeln im Bereich randomisierte Algorithmen

Anwendung:

- Man kann komplizierte Zufallsvariable oft als Summe einfacher Zufallsvariablen schreiben und dann den Erwartungswert der einfachen Zufallsvariablen bestimmen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel:

- Sei X die Würfelsumme von n Würfeln.
- Wir wollen E[X] bestimmen.
- Dazu führen wir die Zufallsvariable X_i ein, die die Augenzahl von Würfel i angibt.
- Für $E[X_i]$ gilt bei einem „perfekten“ Würfel:

$$E[X_i] = 1/6 \cdot (1+2+\ldots+6) = 7/2$$

- Da $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ ist, folgt aufgrund der Linearität des Erwartungswerts:

$$E[X] = E[X_1+X_2+\ldots+X_n] = E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n]$$
$$= 7n/2 \ .$$

Average-Case Laufzeit

Average-case Laufzeit:

- Wir betrachten alle Permutationen der *n* Eingabezahlen.
- Wir berechnen für jede Permutation Laufzeit des Algorithmus bei dieser Permutation.
- Average-case Laufzeit ist dann der Durchschnitt über all diese Laufzeiten.
- Average-case Laufzeit ist die erwartete Laufzeit einer zufällig und gleichverteilt gewählten Permutation aus der Menge aller Permutationen der *n* Eingabezahlen.

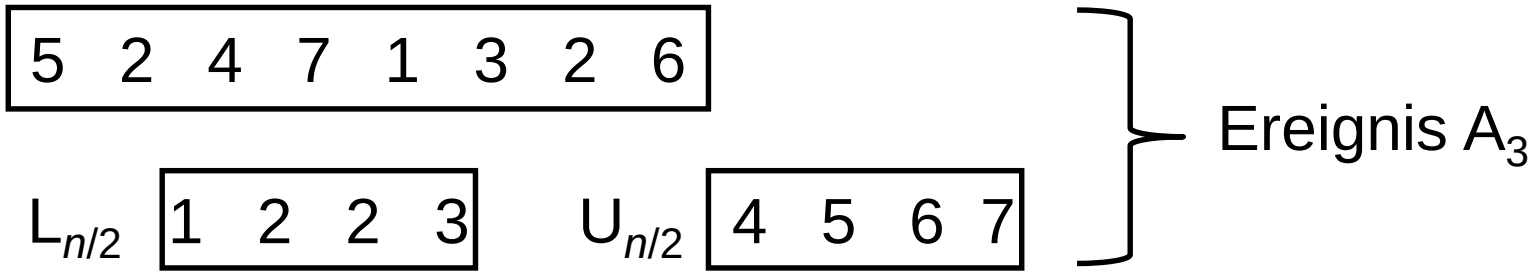
Average-Case – Insertion-Sort

Satz 4.14: Insertion-Sort besitzt average-case Laufzeit $\Theta(n^2)$.

Beweis: Wir zeigen, mit Wahrscheinlichkeit 1/2 hat man mindestens $n^2/16$ Vergleiche (Annahme: n ist gerade).

- Sei $L_{n/2}$ die Menge der $n/2$ kleinsten Zahlen
- Sei $U_{n/2}$ die Menge der $n/2$ größten Zahlen
- A_i: Ereignis, dass in einer zufälligen Permutation der n Zahlen genau i Elemente aus $U_{n/2}$ in der ersten Hälfte der Permutation platziert sind.
- B_i: Ereignis, dass in einer zufälligen Permutation der n Zahlen genau i Elemente aus $L_{n/2}$ in der ersten Hälfte der Permutation platziert sind.

Average-Case – Insertion-Sort



- $Pr[U_{n/4 \le i \le n/2} A_i] = \sum_{n/4 \le i \le n/2} Pr[A_i]$
- $Pr[A_i] = Pr[B_i] \rightarrow Pr[A_i] = Pr[A_{n/2-i}]$
- $\sum_{0 \le i \le n/2} Pr[A_i] = 1$
- $\sum_{n/4 \le i \le n/2} Pr[A_i] = 1 - \sum_{0 \le i < n/4} Pr[A_i] = Pr[A_{n/4}] + 1 - \sum_{n/4 \le i \le n/2} Pr[A_i]$
- $2 \sum_{n/4 \le i \le n/2} Pr[A_i] = 1 + Pr[A_{n/4}] > 1 \rightarrow \sum_{n/4 \le i \le n/2} Pr[A_i] > ½$
- Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 befindet sich mindestens die Hälfte von $U_{n/2}$ in der ersten Hälfte und mindestens die Hälfte von $L_{n/2}$ in der zweiten Hälfte einer zufälligen Permutation.

Average-Case Laufzeit

InsertionSort(Array A)

1. for j ← 2 to length(A) do
2. key ← A[j]
3. i ← j-1
4. while i>0 and A[i]>key do
5. A[i+1] ← A[i]
6. i ← i-1
7. A[i+1] ← key

Mit Wahrscheinlichkeit ½ gibt es mindestens $n/4$ Elemente A[j] in $L_{n/2}$ mit $j \geq n/2$

Sei $j \geq n/2$ und A[j] in $L_{n/2}$

Dann wird die while-Schleife mindestens $n/4$ mal durchlaufen.

$n^2/16$ Vergleiche

Im Durchschnitt produziert Insertion-Sort $>n^2/32$ Vergleiche