Verteilte Algorithmen und Datenstrukturen

Kapitel 2: Netzwerktheorie

Prof. Dr. Christian Scheideler
Institut für Informatik
Universität Paderborn

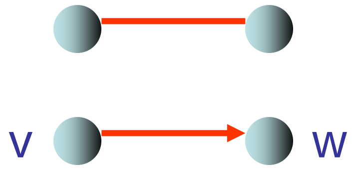
Übersicht

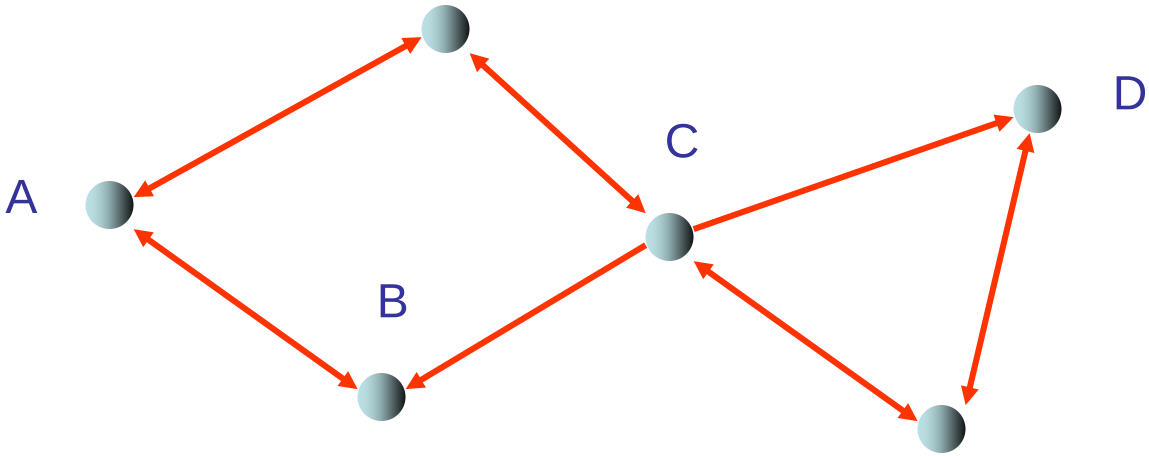
- Grundlagen
- Grundlegende Graphparameter
- Klassische Graphfamilien
- Skip Graphen
- Routing

Grundlagen

Definition 2.1: Ein Graph G=(V,E) besteht aus einer Knotenmenge V und Kantenmenge E.

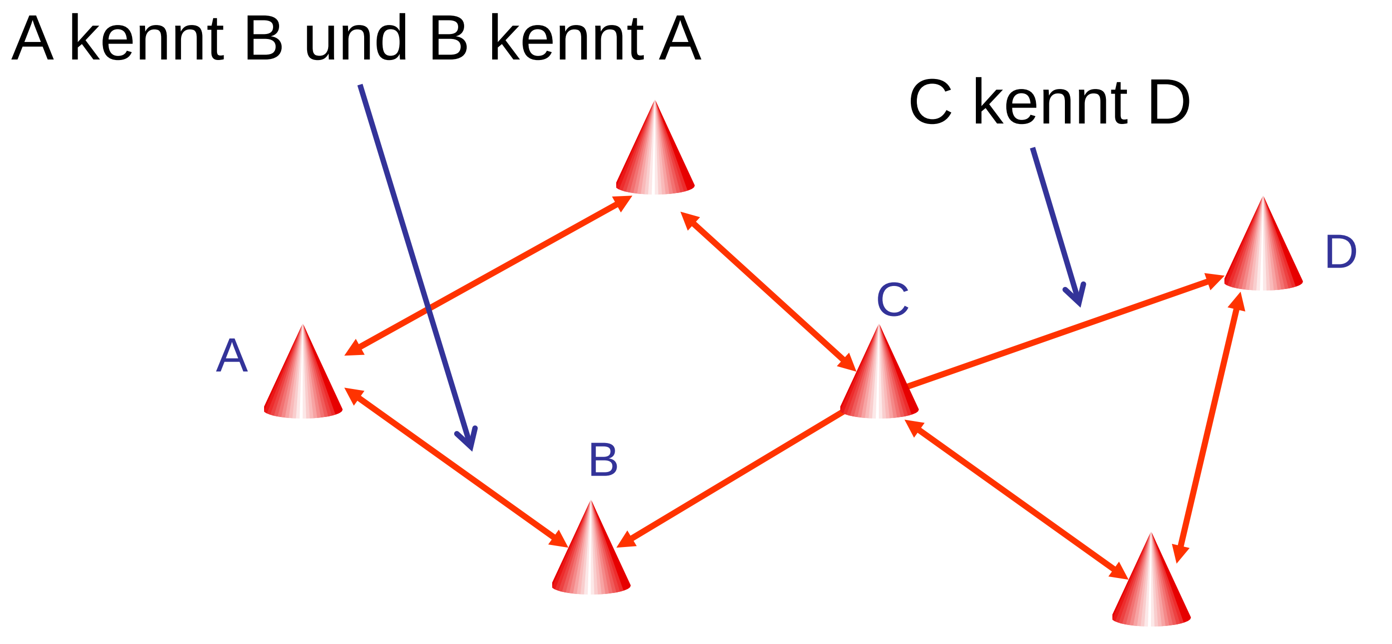
- G ungerichtet: $E \subseteq \{ \{v,w\} \mid v,w \in V\}$
- G gerichtet: $E \subseteq \{ (v,w) \mid v,w \in V\}$





Grundlagen

Graph: repräsentiert Wissen über bzw. Verbindungen zwischen Prozessen



Grundlagen

Definition 2.2: Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

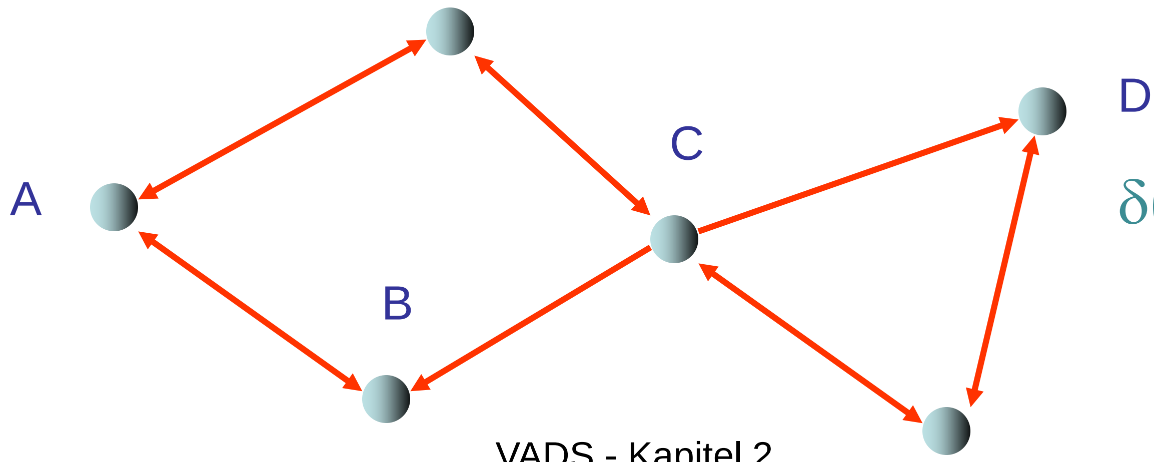
- G ungerichtet: Grad von $v \in V$:

$$\delta(v)=|\{ w \in V \mid \{v,w\} \in E\}|$$

- G gerichtet: Grad von $v \in V$:

$$\delta(v)=|\{ w \in V \mid (v,w) \in E\}|$$

Grad von G: $\Delta = \max_{v \in V} \delta(v)$

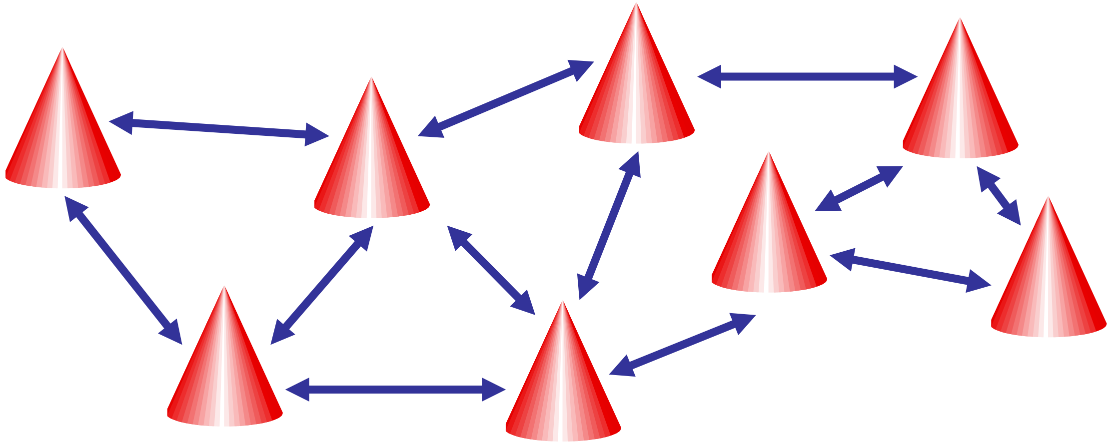


$\delta(D)=1$

Grundlagen

Grad:

- worst-case Aufwand pro Prozess für Kontrolle seiner Verbindungen
- in bigerichteten Graphen, worst-case update Kosten für Prozess, falls sich Menge der Prozesse verändert.

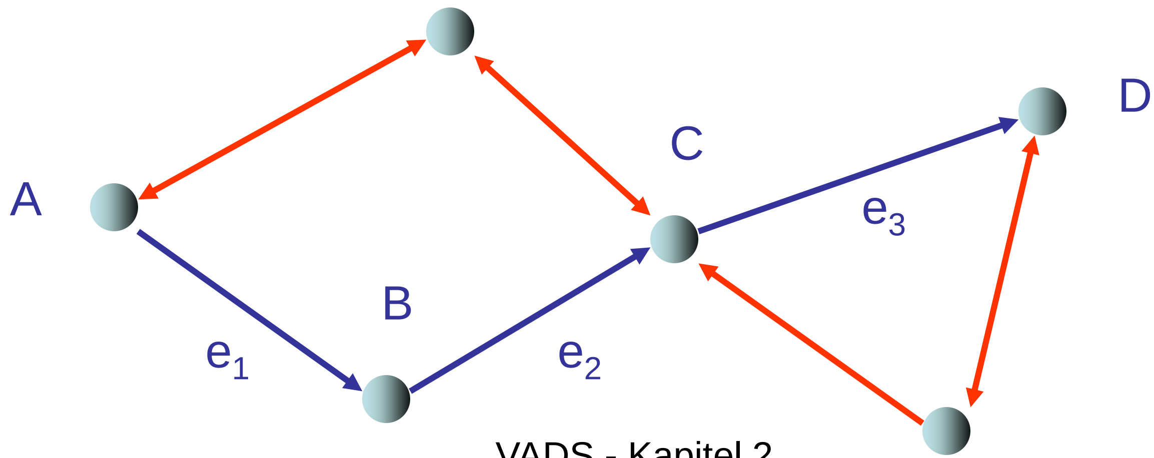


Grad sollte nicht zu hoch sein.

Grundlagen

Definition 2.3: Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Eine Kantenfolge $p=(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ in G heißt Weg/Pfad, falls es eine Knotenfolge $(v_0,\ldots,v_k)$ gibt mit

- G ungerichtet: $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$ für alle $i\in\{1,\ldots,k\}$
- G gerichtet: $e_i=(v_{i-1},v_i)$ für alle $i\in\{1,\ldots,k\}$



Grundlagen

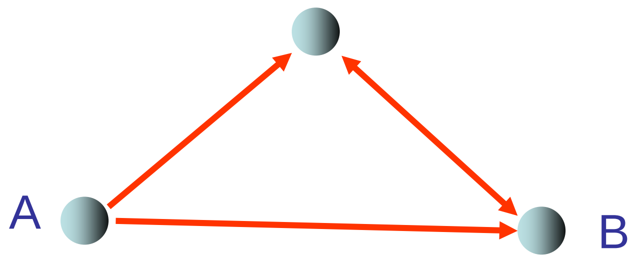
Definition 2.4: Ein Graph $G=(V,E)$ heißt

- zusammenhängend, wenn G ungerichtet ist und für jedes Knotenpaar $v,w \in V$ ein Pfad von v nach w in G existiert.
- schwach zusammenhängend, wenn G gerichtet ist und für jedes Knotenpaar $v,w \in V$ ein Pfad von v nach w in der ungerichteten Version von G existiert
- stark zusammenhängend, wenn G gerichtet ist und für jedes Knotenpaar $v,w \in V$ ein Pfad von v nach w in G existiert

Grundlagen

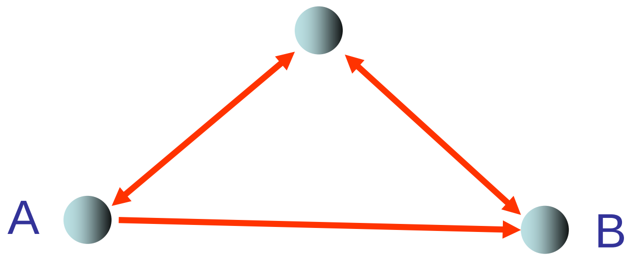
Beispiele:

(1) Graph nur schwach zusammenhängend



kein gerichteter Weg
von B nach A

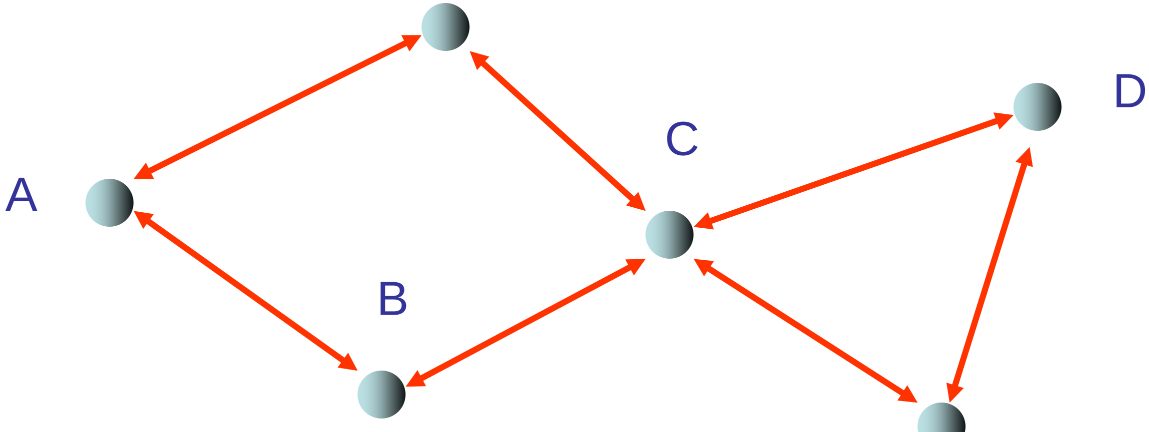
(2) Graph stark zusammenhängend



Grundlegende Graphparameter

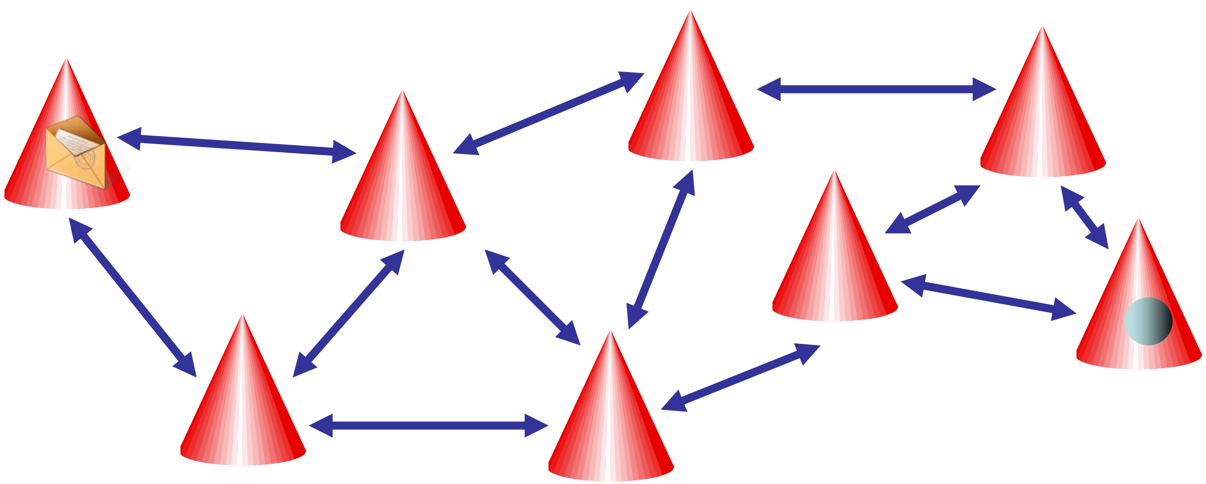
Definition 2.5: Sei $G=(V,E)$ ein Graph und $p=(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ ein Weg von v nach w in G.

- Länge von p: $|p|=k$
- Distanz von w zu v: $d(v,w)$ = min. Weglänge von v nach w ($d(v,w) = \infty$ falls kein Weg von v nach w existiert)
- Durchmesser von G: $D(G)=\max_{v,w\in V} d(v,w)$



Grundlegende Graphparameter

Durchmesser: untere Schranke für worst-case Zeit (gemessen in Kommunikationsrunden) für Zugriff auf anderen Prozess

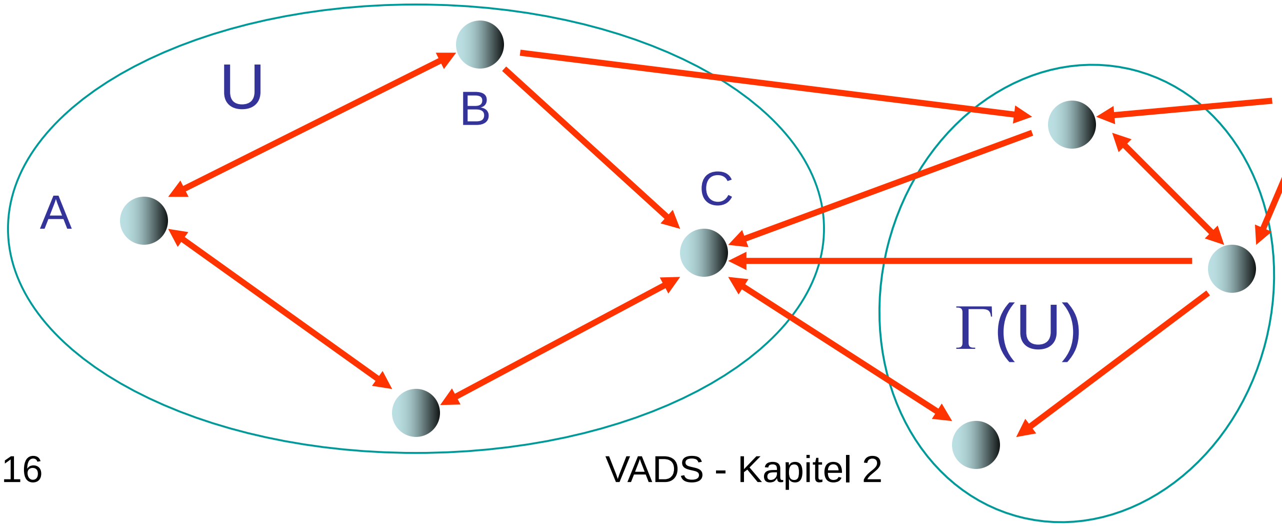


Durchmesser sollte nicht zu hoch sein.

Grundlegende Graphparameter

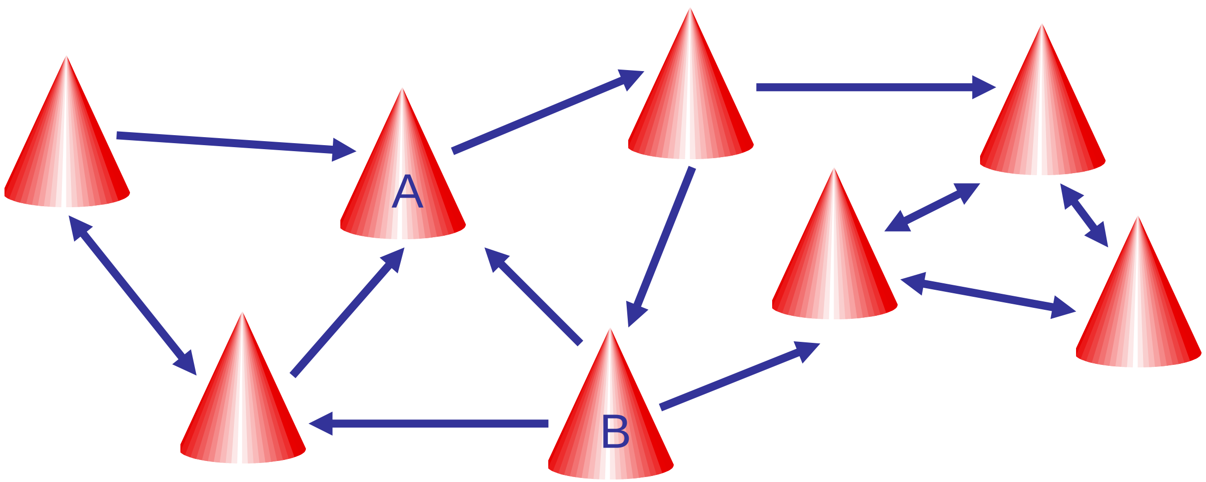
Definition 2.6: Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

- $\Gamma(U)$: Nachbarmenge einer Knotenmenge $U \subseteq V$, d.h. $\Gamma(U) = \{ w \in V \setminus U \mid$ es gibt $v \in U$ mit $\{v,w\} \in E$ (bzw. $(v,w) \in E$ oder $(w,v) \in E$ im gerichteten Fall) $\}$
- $\alpha(U) = |\Gamma(U)| / |U|$: Expansion von U
- $\alpha(G) = \min_{U, |U| \leq \lceil |V|/2 \rceil} \alpha(U)$: Expansion von G



Grundlegende Graphparameter

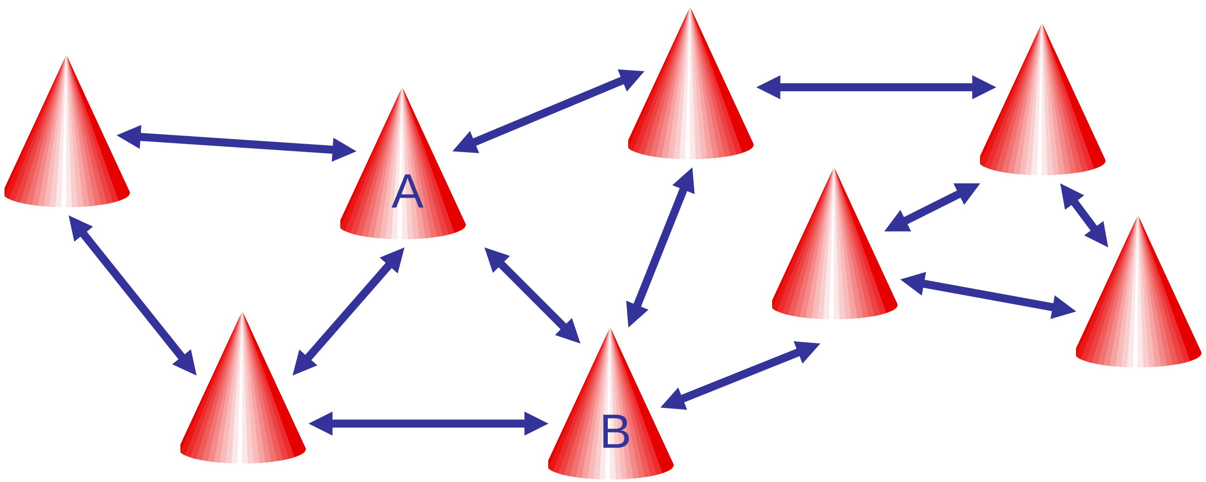
Expansion: k Ausfälle $\Rightarrow$ maximal $k/\alpha(G)$ Knoten werden vom Graphen abgetrennt



Beweis: Sei U eine Menge nicht augefallener Knoten, die durch Ausfälle abgetrennt werden. Dann müssen alle Knoten in $\Gamma(U)$ ausfallen, d.h. $|\Gamma(U)|\leq k$. Weiterhin ist $\alpha(U)\geq\alpha(G)$ und $\alpha(U)=|\Gamma(U)|/|U|$, also $|U|\leq k/\alpha(G)$.

Grundlegende Graphparameter

Expansion: k Ausfälle $\Rightarrow$ maximal $k/\alpha(G)$ Knoten werden vom Graphen abgetrennt

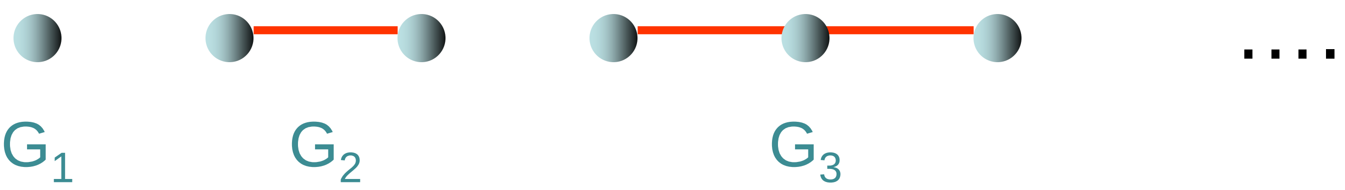


Expansion sollte möglichst groß sein

Klassische Graphfamilien

Im folgenden betrachten wir klassische Familien ungerichteter Graphen $\mathcal{G}=\{G_1, G_2, \ldots\}$.

Beispiel: Familie der linearen Listen

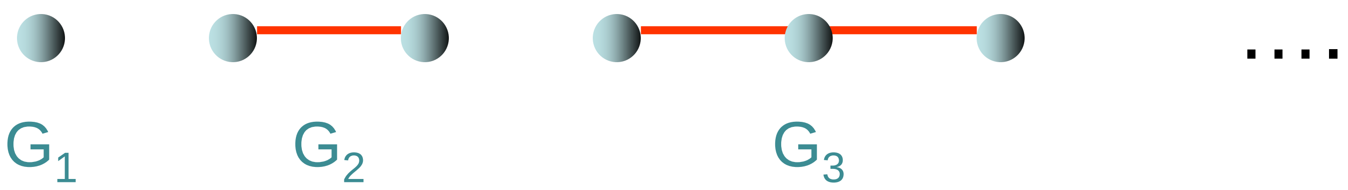


Wir sagen: Graph G aus einer Familie $\mathcal{G}$ hat konstanten Grad, falls der Grad aller Graphen in $\mathcal{G}$ durch eine Konstante beschränkt ist.

Klassische Graphfamilien

Im folgenden betrachten wir klassische Familien ungerichteter Graphen $\mathcal{G}=\{G_1, G_2, \ldots\}$.

Beispiel: Familie der linearen Listen

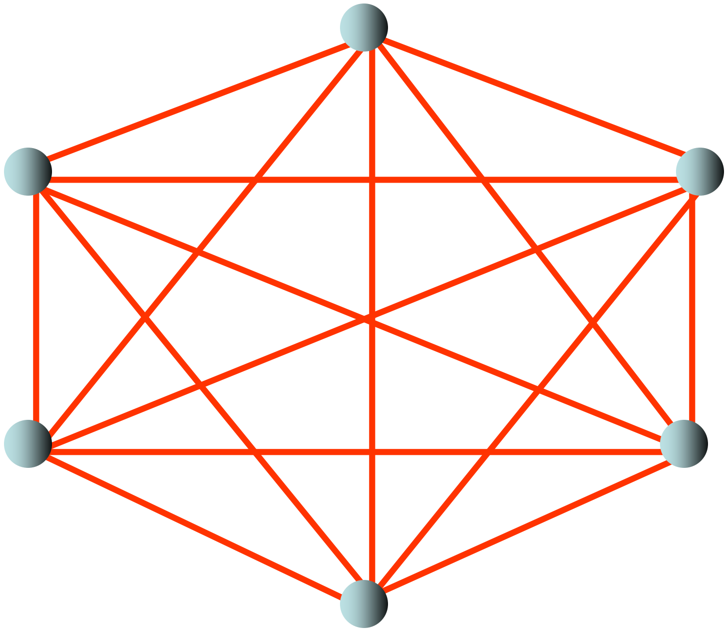


Für einen Graphen G aus $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit

- n: Anzahl der Knoten (bzw. Größe) von G
- m: Anzahl der Kanten von G

Clique

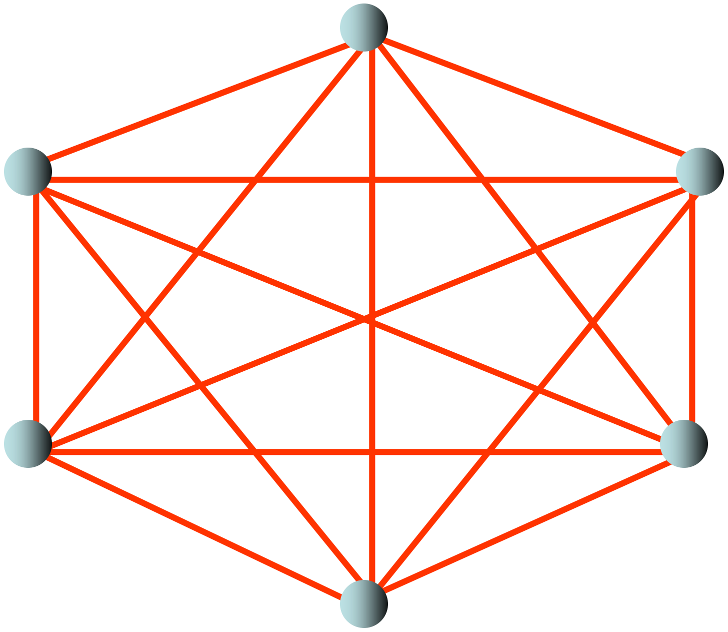
Vollständiger Graph / Clique: jeder Knoten ist mit jedem anderen verbunden



Vorteil: niedriger Durchmesser, hohe Expansion

Clique

Vollständiger Graph / Clique: jeder Knoten ist mit jedem anderen verbunden



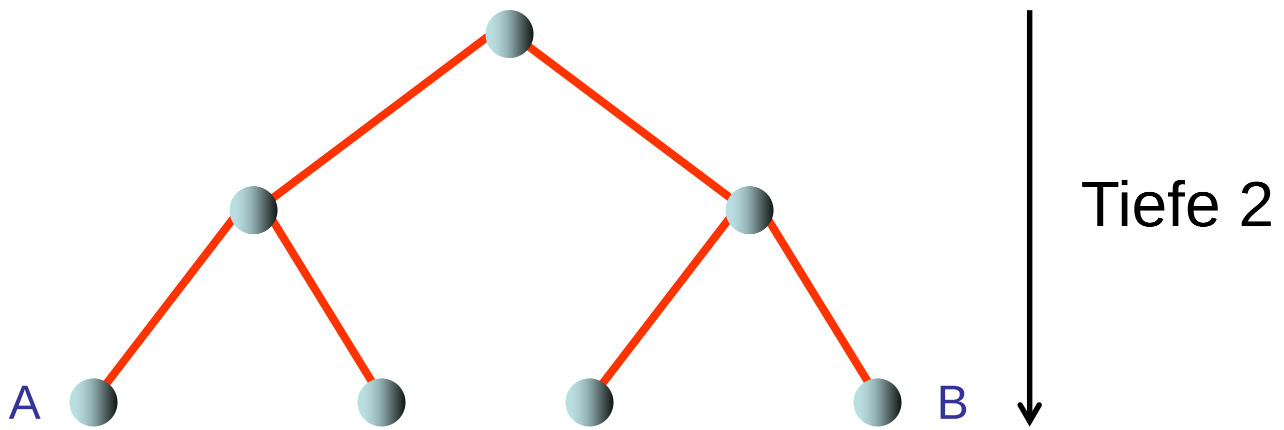
Problem: hoher Grad! ($\delta(v)=n-1$ für alle v)

Lineare Liste

- Grad 2 (minimal für Zusammenhang), ABER
- Durchmesser schlecht ($D(\text{Liste})=n-1$)
- Expansion schlecht ($\alpha(\text{Liste})\approx 2/n$)

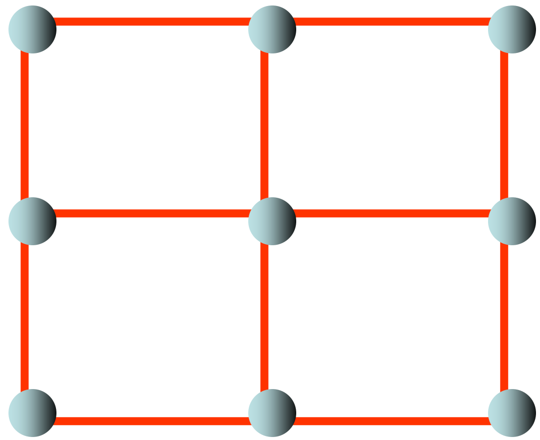
Wie erhält man kleinen Grad und Durchmesser?

Vollständiger binärer Baum



- $n=2^{k+1}-1$ Knoten bei Tiefe $k\in\mathbb{N}_0$, Grad 3
- Durchmesser ist $2k \approx 2 \log_2 n$, ABER
- Expansion schlecht ($\alpha(\text{Baum})\approx 2/n$)

2-dimensionales Gitter

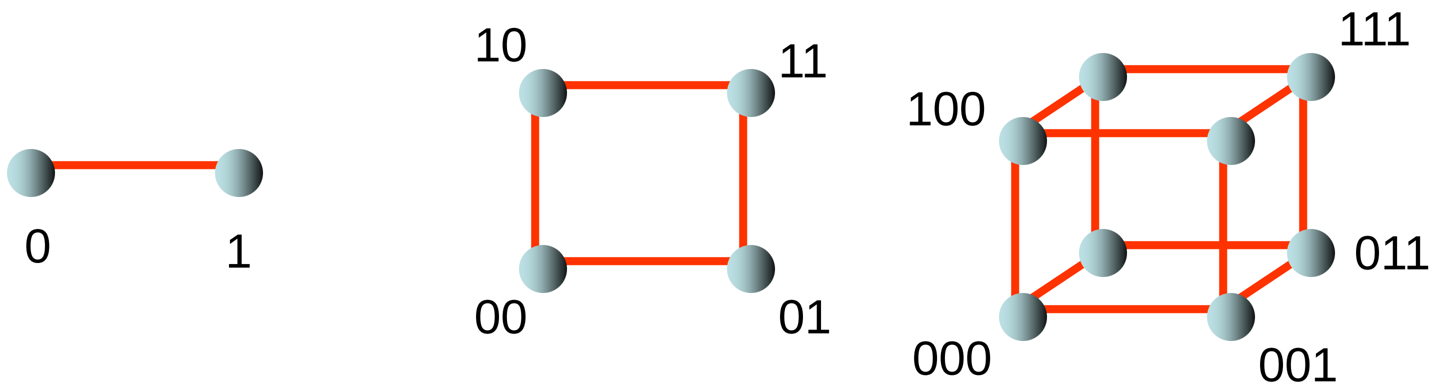


- $n = k^2$ Knoten bei k Knoten pro Seite, maximaler Grad 4
- Durchmesser ist $2(k-1) \approx 2\sqrt{n}$
- Expansion ist $\approx 2/\sqrt{n}$
- Nicht schlecht, aber geht es besser?

d-dimensionaler Hypercube

- Knoten: $(x_1,\ldots,x_d) \in \{0,1\}^d$
- Kanten: $\forall i: (x_1,\ldots,x_d) \rightarrow (x_1,..,1\text{-}x_i,..,x_d)$

nur Bit i gedreht

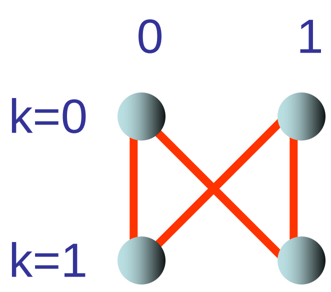


d=1 d=2 d=3

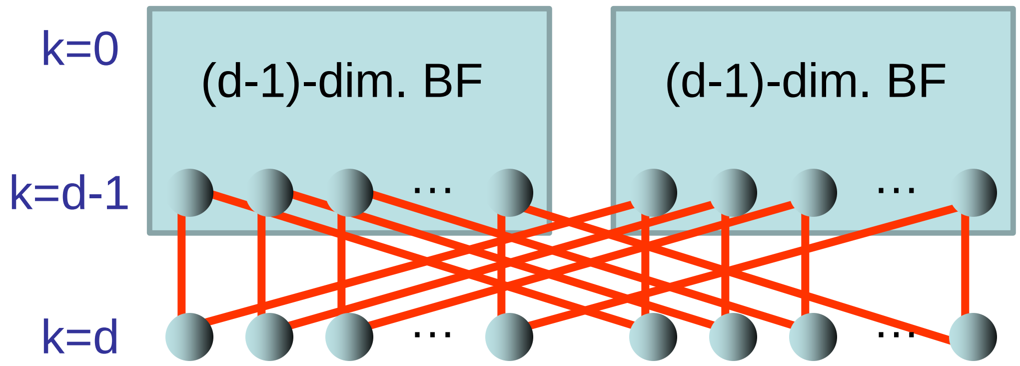
Grad d, Durchmesser d, Expansion $\approx 1/\sqrt{d}$

d-dimensionales Butterfly

- Knoten: $(k,(x_d,\dots,x_1)) \in \{0,..,d\} \times \{0,1\}^d$
- Kanten: $(k,(x_d,\dots,x_1)) \to (k+1,(x_d,..,x_{k+1},..,x_1)),$
  $(k+1,(x_d,..,1\text{-}x_{k+1},..,x_1))$



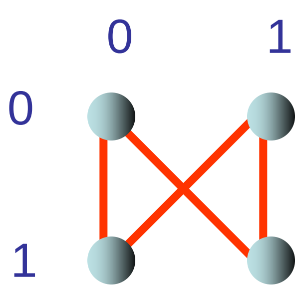
d=1

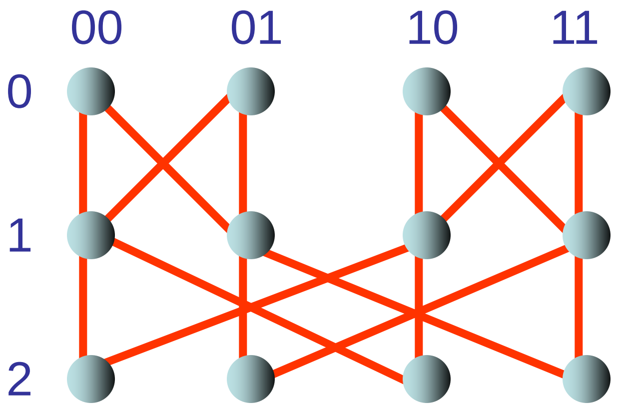


d-dim. BF

d-dimensionales Butterfly

- Knoten: $(k,(x_d,\dots,x_1)) \in \{0,..,d\} \times \{0,1\}^d$
- Kanten: $(k,(x_d,\dots,x_1)) \to (k+1,(x_d,..,x_{k+1},..,x_1)),$
  $(k+1,(x_d,..,1\text{-}x_{k+1},..,x_1))$

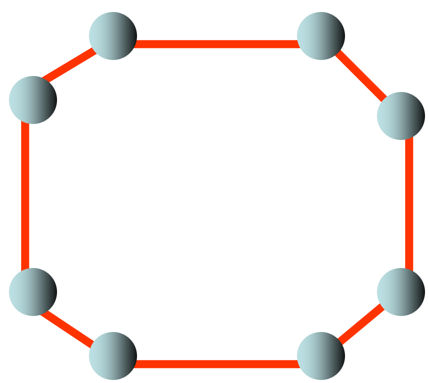


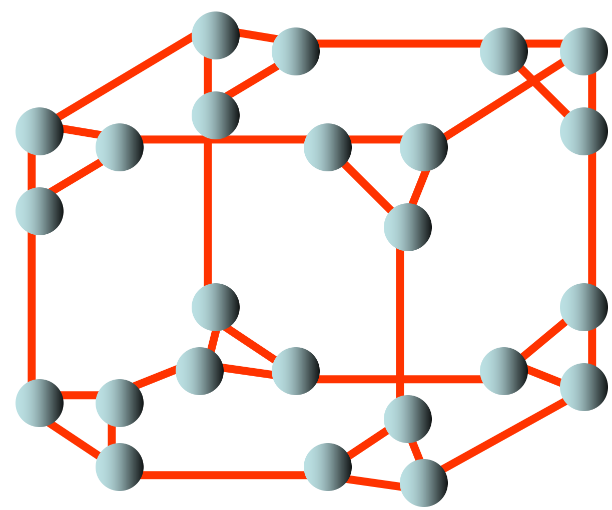


Grad 4, Durchmesser 2d, Expansion ~1/d

Cube-Connected-Cycles

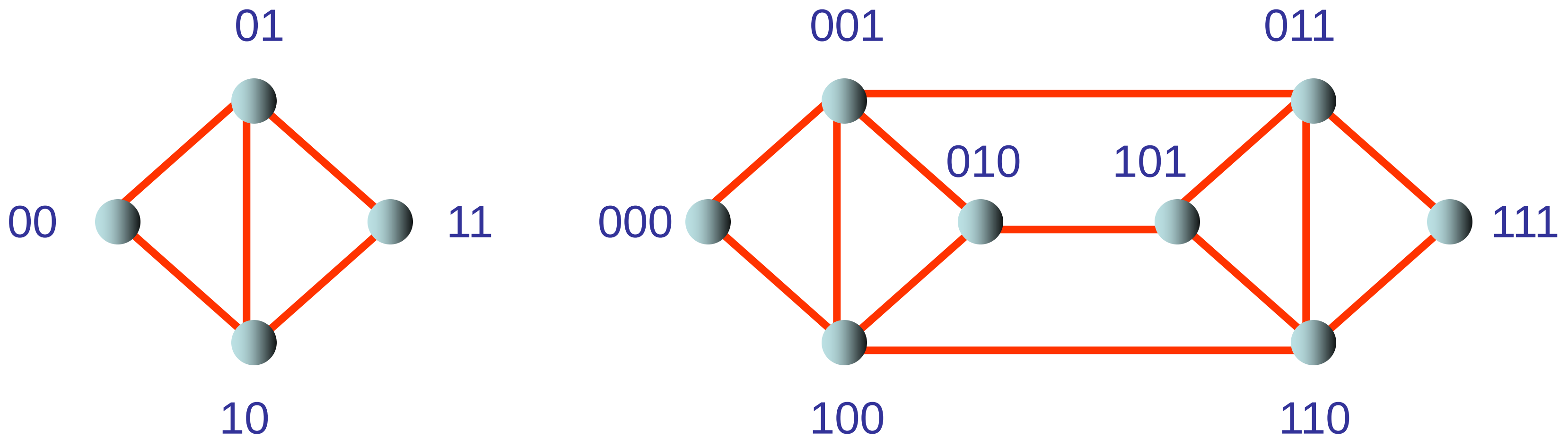
- Knoten: $(k,(x_1,\dots,x_d)) \in \{0,..,d\text{-}1\} \times \{0,1\}^d$
- Kanten: $(k,(x_1,\dots,x_d)) \rightarrow (k\text{-}1 \pmod d,(x_1,\dots,x_d)),$
  $(k{+}1 \pmod d,(x_1,..,x_d)),$
  $(k,(x_1,..,1\text{-}x_{k+1},..,x_d))$





d-dimensionaler De Bruijn Graph

- Knoten: $(x_1,\ldots,x_d) \in \{0,1\}^d$
- Kanten: $(x_1,\ldots,x_d) \rightarrow (0,x_1,x_2,\ldots,x_{d-1})$
  $(1,x_1,x_2,\ldots,x_{d-1})$



Durchmesser

Satz 2.7: Jeder Graph mit maximalem Grad $\delta \geq 4$ und Größe n muss einen Durchmesser von mindestens $(\log n)/(\log(\delta-1))-1$ haben.

Beweis: Übung

Satz 2.8: Für jedes gerade $\delta \geq 4$ gibt es eine Familie von Graphen mit maximalem Grad δ und Größe n mit Durchmesser höchstens $(\log n) / (\log \delta -1)$.

Beweis: Übung

Expansion

Satz 2.9: Für jeden Graph G ist die Expansion $\alpha(G) \in [0,1]$.

Beweis: siehe Definition von $\alpha(G)$.

Satz 2.10: Es gibt Familien von Graphen mit konstantem Grad und konstanter Expansion. Solche Graphfamilien heißen Expander.

Beispiel: Gabber-Galil Graph

- Knotenmenge: $(x,y) \in \{0,\dots,k-1\}^2$
- $(x,y) \rightarrow (x,x+y),(x,x+y+1), (x+y,y), (x+y+1,y) \pmod k$

Noch bessere Expander bekannt als Ramanujan Graphen.

Skip Graphen

Betrachte eine beliebige Menge V an Knoten mit totaler Ordnung (d.h. die Knoten können bzgl. einer Ordnung ´<´ sortiert werden).

- Jeder Knoten v sei assoziiert mit einer zufälligen Bitfolge $r(v)$.
- $prefix_i(v)$: erste i Bits von $r(v)$
- $succ_i(v)$: nächster Nachfolger w von v (bzgl. der Ordnung ´<´) mit $prefix_i(w)=prefix_i(v)$.
- $pred_i(v)$: nächster Vorgänger w von v mit $prefix_i(w)=prefix_i(v)$.

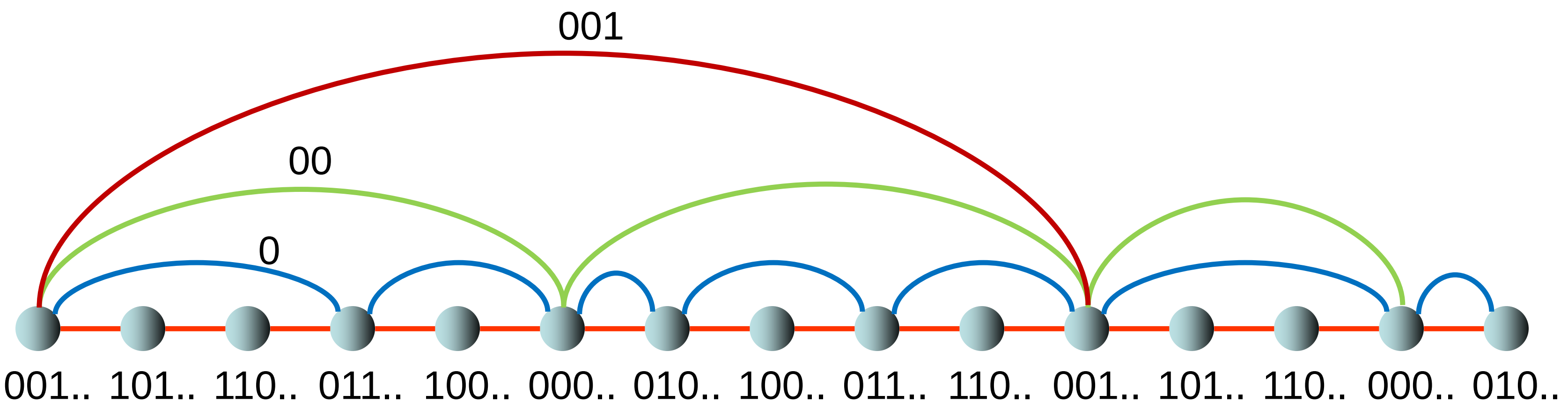
Skip Graph Regel:

Für jeden Knoten v und jedes $i \in \mathbb{N}_0$:

- v hat eine Kante zu $pred_i(v)$ und $succ_i(v)$

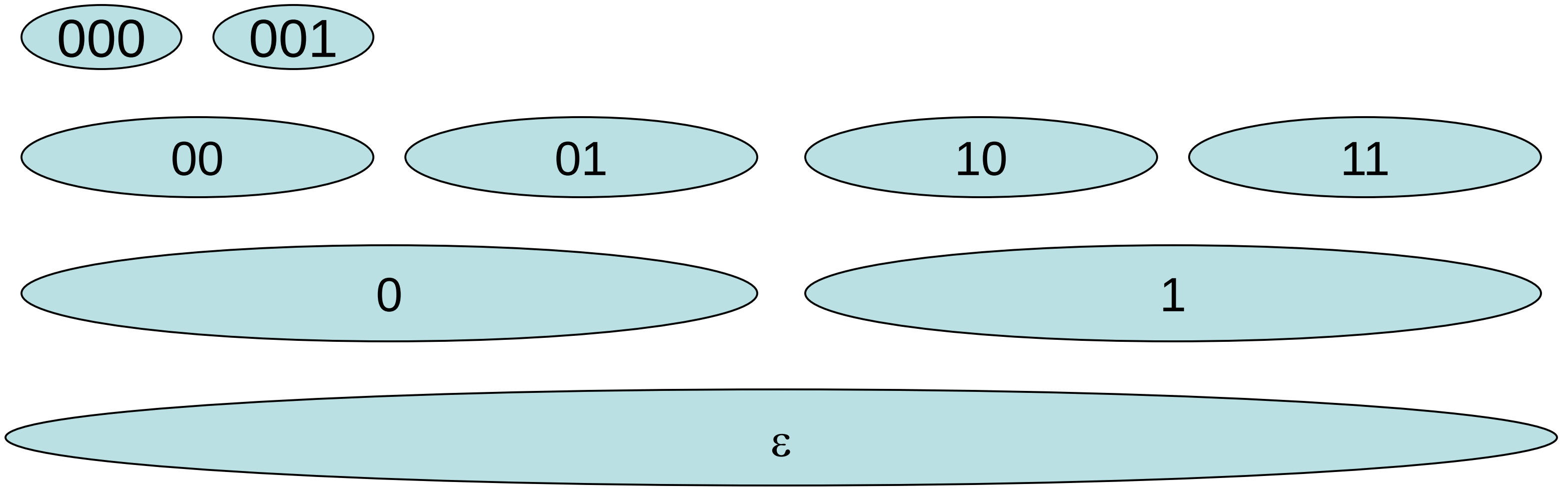
Skip Graphen

Beispiel einiger Teillisten für verschiedene Präfixlängen im Skip Graphen:



Skip Graphen

Hierarchische Sicht: geordnete Listen von Knoten mit demselben Präfix.

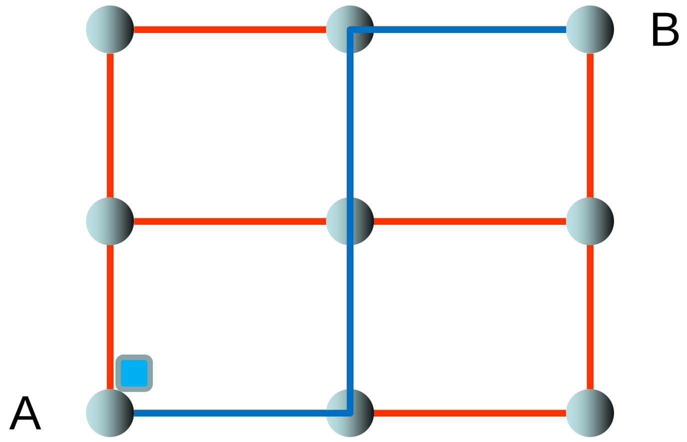


$\Theta(\log n)$ Grad, $\Theta(\log n)$ Durchmesser, $\Theta(1)$ Expansion (mit hoher Wahrscheinlichkeit)

Übersicht

- Grundlagen
- Grundlegende Graphparameter
- Klassische Graphfamilien
- Skip Graphen
- Routing

Routing



- Routing: finde Weg von A nach B

Routing

Problem: finde mit möglichst geringem Koordinierungsaufwand Wege, so dass

- Weglänge (Dilation) so kurz wie möglich ist und
- möglichst wenige Wege über dieselben Knoten wollen (Congestion)

Einfachste Lösung: oblivious Routing (Wege hängen nur von Quell-Ziel-Paaren ab)

Routing

Formal: gegeben eine Menge an Wegen $P=\{p_1, p_2, p_3,\ldots\}$ in einem Graphen $G=(V,E)$ mit Gewichten $w:P\rightarrow\mathbb{R}$, dann ist

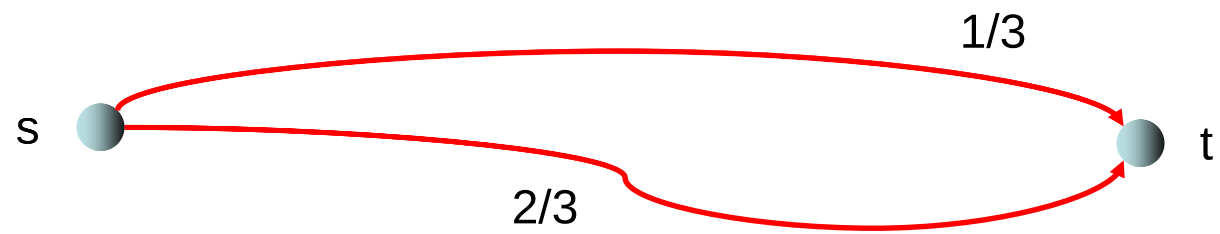
- Congestion von P:
  $C(P) = \max_{v\in V} \Sigma_{p\in P_v} w(p)$, wobei $P_v\subseteq P$ die Menge aller Wege in P über v ist
- Dilation von P:
  $D(P) = \max_{p\in P} |p|$

Oblivious Routing

Definition 2.11 (Oblivious Routing):

Sei $G=(V,E)$ ein Netzwerk. Ein oblivious Routingschema (P,w) ist spezifiziert durch:

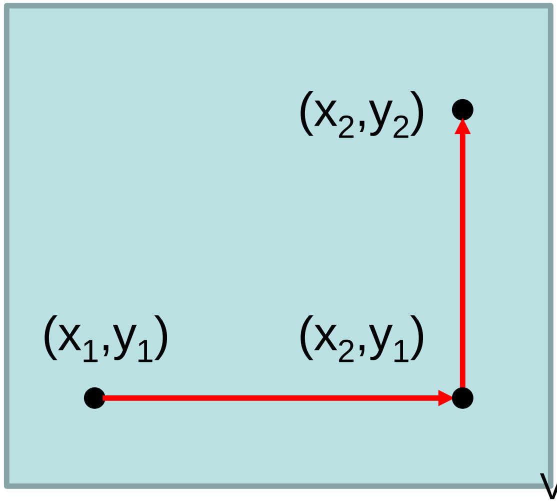
- Wegesystem: $P = \cup_{s,t} P_{s,t}$ mit nichtleerer Wegemenge $P_{s,t}$ für alle Quell-Ziel-Paare $(s,t) \in V^2$
- Gewichtsfunktion: $w: P \to \mathbb{R}_+$, so dass für alle $(s,t) \in V^2$: $\sum_{p \in P_{s,t}} w(p) = 1$.



Oblivious Routing im Gitter

Wegesystem P für $k \times k$-Gitter:

- Für jedes Paar $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [k]^2$: route erst von (x_1,y_1) nach (x_2,y_1), dann von (x_2,y_1) nach (x_2,y_2).
- D.h. eindeutiger Weg pro Quell-Ziel-Paar.



x-y-Routing Strategie

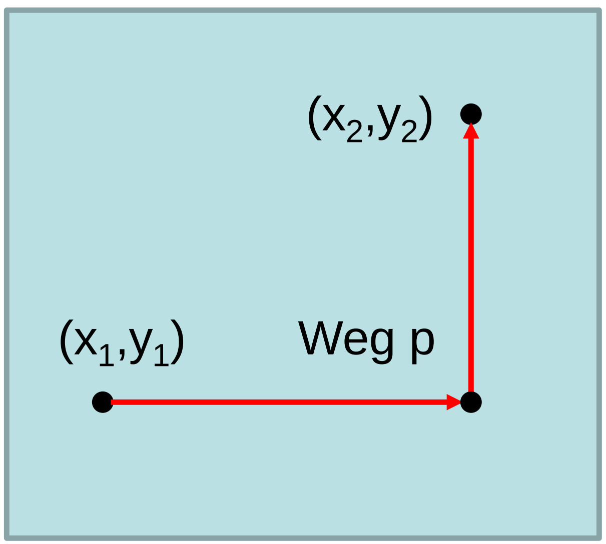
Oblivious Routing im Gitter

„Benchmark“ für Routingstrategie: kann die Strategie beliebige Permutationen $\pi:V\rightarrow V$ mit geringer Dilation und Congestion routen? (D.h. das Routingproblem R ist definiert als $R=\{ (v,\pi(v)) \mid v\in V \}$).

Satz 2.12: Die x-y-Routingstrategie kann jede Permutation im $k\times k$-Gitter mit Congestion höchstens $4d$ und Dilation höchstens d routen, wobei d die maximale Distanz eines Quell-Ziel-Paares ist.

Oblivious Routing im Gitter

Beweis:

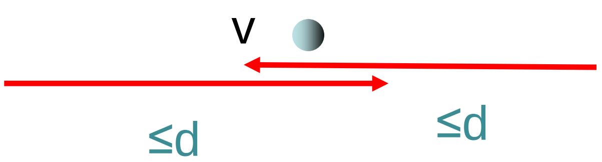


Dilation:

- p hat Länge $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$
- also ist max. Weglänge d

Congestion:

- betrachte Knoten v in x-Richtung



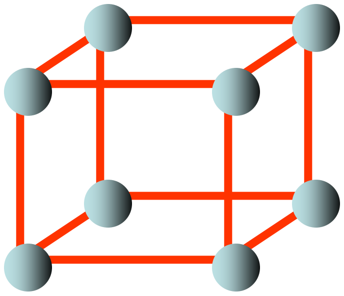
- maximal 2d Quellen haben Wege, die in x-Richtung über v laufen, also ist Congestion in x-Richtung $\leq 2d$
- dasselbe gilt auch für Ziele in y-Richtung

Oblivious Routing im Hypercube

Bitanpassungsstrategie:
Weg von $(x_1,\ldots,x_d)$ nach $(y_1,\ldots,y_d)$ führt über $(y_1,x_2,\ldots,x_d)$, $(y_1,y_2,x_3,\ldots,x_d)$, $(y_1,y_2,y_3,x_4,\ldots,x_d)$, …, $(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{d-1},x_d)$, $(y_1,\ldots,y_d)$

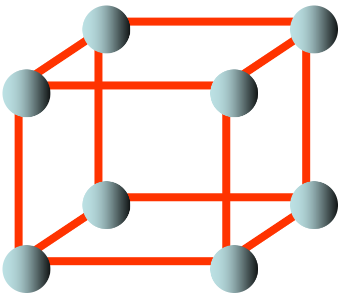
- Dilation: optimal, da Weglänge gleich Distanz
- Congestion: es gibt Permutationen, die sehr hohe Congestion haben!

Beispiel: sei $\pi(x_1,\ldots,x_d) = (x_d,\ldots,x_1)$ für alle $(x_1,\ldots,x_d)$



Oblivious Routing im Hypercube

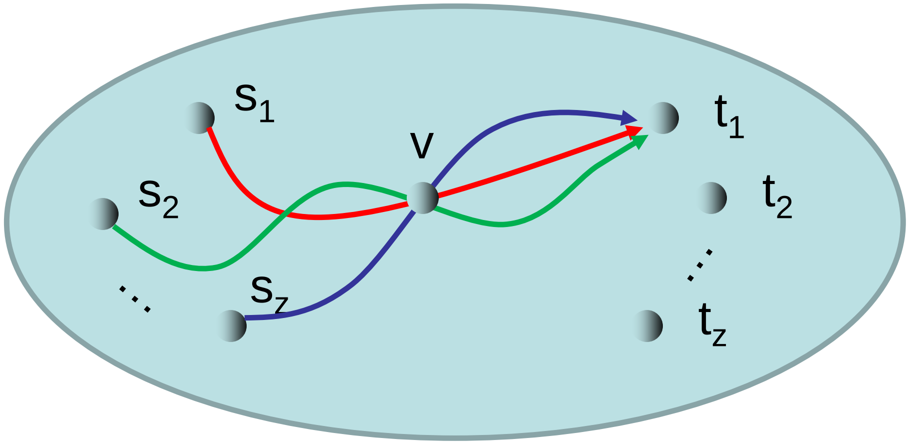
Beispiel: sei $\pi(x_1,\ldots,x_d) = (x_d,\ldots,x_1)$ für alle $(x_1,\ldots,x_d)$



- Betrachte Knotenmenge $M=\{ (x_1,\ldots,x_{d/2},0,\ldots,0) \mid x_i\in\{0,1\}$ für alle $i\in\{1,\ldots,d/2\} \}$
- Nach $d/2$ Routingschritten gemäß π sind alle Pakete mit Quelle in M im Knoten $(0,\ldots,0)$
- Da $|M|=2^{d/2} = \sqrt{2^d} = \sqrt{n}$ ist, kann Congestion wesentlich größer als Dilation (maximal $\log n$) sein. Bestmöglich wäre Congestion $O(\log n)$!

Borodin-Hopcroft Schranke

Satz 2.13: Für jeden ungerichteten Graphen G der Größe n mit Grad δ und jede oblivious Routing Strategie mit nur einem Pfad pro Quell-Ziel-Paar gibt es eine Permutation π, für die ein Knoten von mindestens $\sqrt{n/\delta}$ Pfaden durchlaufen wird.



Es gibt v und $t_1,\ldots,t_z$,so dass jedes t_i mind. z Quellen hat,deren Wege durch v führen, $z = \sqrt{n/\delta}$.

Valiants Trick

Frage: gibt es oblivious Routingstrategien, die für alle Permutationen eine niedrige Congestion haben?

Antwort: ja, aber wir brauchen mehrere Pfade pro Quell-Ziel-Paar.

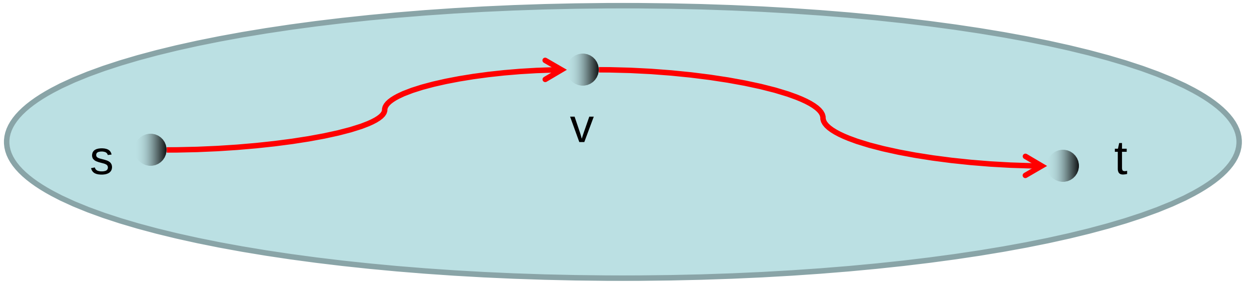
Strategie:

- Konstruiere zunächst ein Wegesystem $P' = \cup_{s,t} P'_{s,t}$ mit minimaler Congestion C_{OPT} (kann in polynomieller Zeit berechnet werden).
- Konstruiere aus P' mittels Zwischenzielen ein Wegesystem $P = \cup_{s,t} P_{s,t}$, so dass die (gewichtete) Congestion in etwa gleich bleibt zu P'.

Valiants Trick

Konstruktion von P für ein bel. Netzwerk G=(V,E):

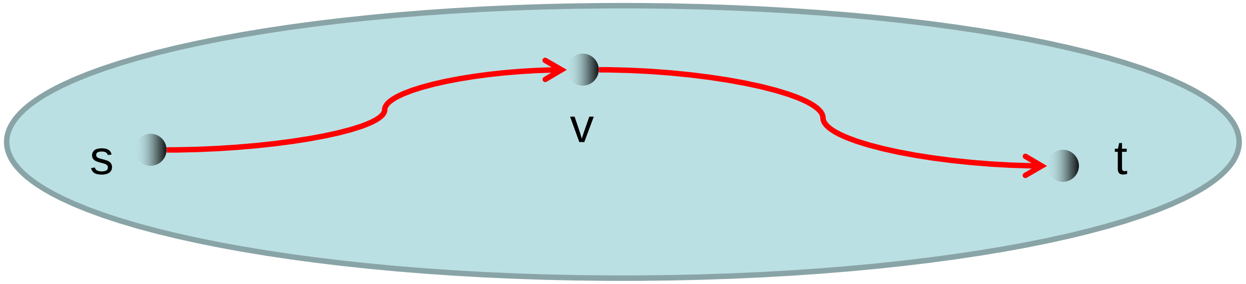
- $P' = \cup_{s,t} P'_{s,t}$: System mit minimaler Congestion C_{OPT}
- $P_{s,t} = \{ p=q_1 \circ q_2 \mid q_1 \in P'_{s,v}$ und $q_2 \in P'_{v,t}$ für ein $v \in V \}$ ($\circ$: Konkatenation)
- Für alle $p=q_1 \circ q_2$ in $P_{s,t}$ setzen wir $w(p)=w(q_1) \cdot w(q_2)/n$
- Damit ist $\sum_{p \in P_{s,t}} w(p) = 1$, d.h. $P = \cup_{s,t} P_{s,t}$ ist ein gültiges Wegesystem
- Congestion von P: $2C_{OPT}$ (Beweis: Übung)



Valiants Trick

Eigenschaften von P:

- Betrachte beliebiges Permutationsroutingproblem π
- Betrachte nur die erste Hälfte aller Wege in P für π
- Die erste Hälfte verwendet alle Wege in P´, da jede Quelle s $1/n$-Bruchteile ihres Pakets über alle Wege in $P'_{s,v}$ für alle $v \in V$ schickt, und über jeden Weg $q_1 \in P'_{s,t}$ wandert ein $w(q_1)/n$-Bruchteil des Pakets.
- Also ist die Congestion C_{OPT}/n.
- Das gleiche gilt für zweite Hälfte.



Valiants Trick

Satz 2.14: Mit Valiants Trick (d.h. einem festen oblivious Routingschema mit Zwischenzielen) kann in jedem Netzwerk jede Permutation mit Congestion höchstens $2C_{OPT}/n$ geroutet werden.

Satz 2.15: In jedem Netzwerk benötigt eine Permutation im Durchschnitt mindestens C_{OPT}/n Congestion, um geroutet zu werden.

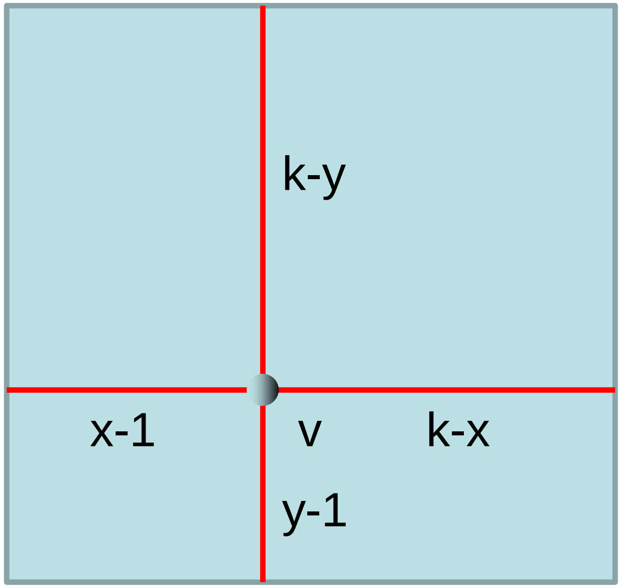
Beweis: Übung

Valiants Trick

Obere Schranke für C_{OPT} für $k \times k$-Gitter:

Für das x-y-Routing gilt für jeden Knoten v an Position $(x,y) \in \{1,\dots,k\}^2$:

- Es gibt maximal $(x-1)(k-x+1)k + k^2 + (k-x)x \cdot k$ Quell-Ziel-Paare, deren Pfade v in x-Richtung durchlaufen
- Entsprechend gibt es maximal $(y-1)(k-y+1)k + k^2 + (k-y)y \cdot k$ Quell-Ziel-Paare, deren Pfade v in y-Richtung durchlaufen
- Also ist $C_{OPT}=O(k^3)$ und damit $C_{OPT}/n = O(k)$.

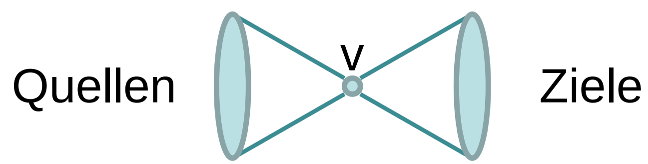


Valiants Trick

Obere Schranke für C_{OPT} für d-dim. Hypercube:

Für die Bitanpassungsstrategie gilt für jeden Knoten v:

- Für jedes $i \in \{0,\dots,d\}$ hat v 2^i Quellen, die v in i Schritten erreichen können, und die von v aus noch 2^{d-i} Ziele erreichen können.



- Es können also maximal

$$\Sigma_{i=0}^{d}\, 2^i \cdot 2^{d-i} = (d+1)2^d$$

Pfade über v laufen.

- Also ist $C_{OPT} \leq (d+1)2^d$ und damit $C_{OPT}/n = O(d)$.

Valiants Trick

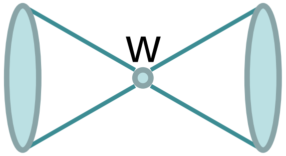
Valiants Trick für d-dimensionalen Hypercube:

- Bitanpassungsstrategie ist tatsächlich sogar optimales Wegesystem für P'.
- D.h. $P'_{s,t}$ besteht lediglich aus einem Weg für jedes Knotenpaar (s,t) im Hypercube, d.h. $P'_{s,t} = \{p_{s,t}\}$ für den Bitanpassungsweg $p_{s,t}$ und $w(p_{s,t})=1$.
- Also ist $P_{s,t} = \{ p_{s,v,t} = p_{s,v} \circ p_{v,t} \mid v \in V \}$ mit $w(p_{s,v,t}) = 1/n$.

Valiants Trick

Ist das Wegesystem wirklich gut?

- Betrachte eine beliebige Permutation π (d.h. wir haben Quell-Ziel-Paare $(v, \pi(v))$ mit 1 Paket je Paar).
- Zunächst wird für jede Quelle s das Paket über n Zwischenziele v „verteilt“
- Dilation: maximal d bis v, also insgesamt maximal $2d$.
- Congestion: betrachte einen festen Knoten w und eine feste Dimension i (d.h. die Pakete haben die ersten i Dimensionen bereits angepasst).
- Mit der Bitanpassungsstrategie gibt es 2^i mögliche Quellen für w.
- Weiterhin können 2^{d-i} Zwischenziele von w aus erreicht werden.

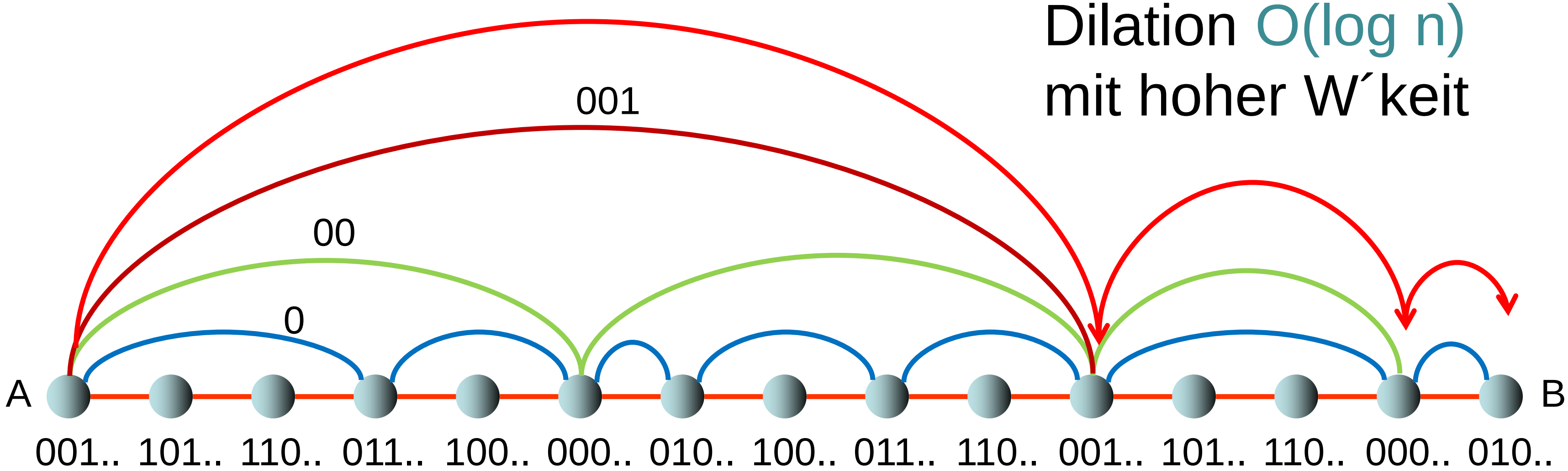
Quellen  Zwischenziele

- D.h. die Anzahl der Quell-Ziel-Paare, dessen Pfade w durchlaufen, ist max.
  $$\Sigma_{i=0}^{d} 2^i \cdot 2^{d-i} = (d+1) \cdot 2^d = (d+1) \cdot n.$$
- Da jeder dieser Pfade ein Gewicht von $1/n$ hat, ist die Congestion maximal
  $$(d+1) \cdot n \cdot 1/n = d+1.$$
- Da diese Congestion zweimal entsteht (von der Quelle zum Zwischenziel, und vom Zwischenziel zum Ziel), ist die Gesamtcongestion $\leq 2(d+1)$.

Oblivious Routing im Skip Graph

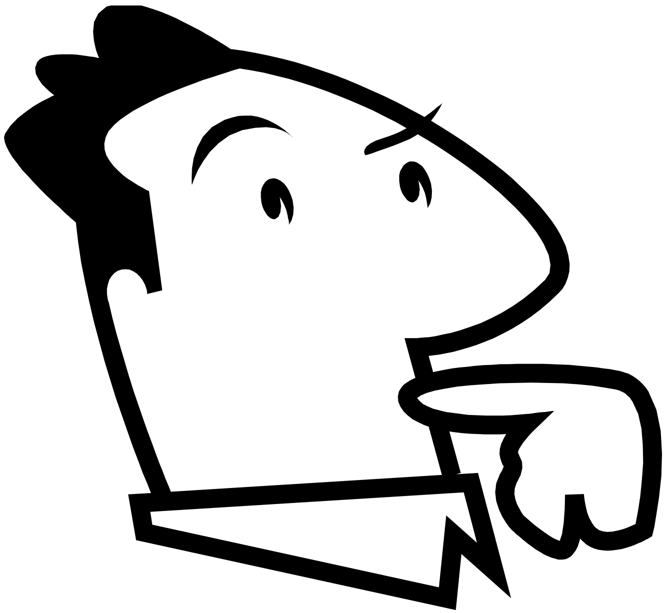
Geeignete Routingstrategie (A kennt ID von B): wähle möglichst lange Kante in der Richtung des Ziels B (Greedy Routing)

Dilation O(log n) mit hoher W´keit



Referenzen

- James Aspnes, Udi Wieder: The expansion and mixing time of skip graphs with applications. *Distributed Computing* 21(6): 385-393 (2009).
- O. Gabber and Z. Galil. Explicit constructions of linear-sized superconcentrators. *Journal of Computer and System Sciences, 22:407–420, 1981.*
- F. Leighton. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays · Trees · Hypercubes. Morgan* Kaufmann Publishers, 1992.
- A. Lubotzky, R. Phillips, and R. Sarnak. Ramanujan graphs. *Combinatorica, 8(3):261–277, 1988.*
- C. Scheideler. *Universal Routing Strategies for Interconnection Networks.* Lecture Notes in Computer Science 1390. Springer, 1998.



Fragen?