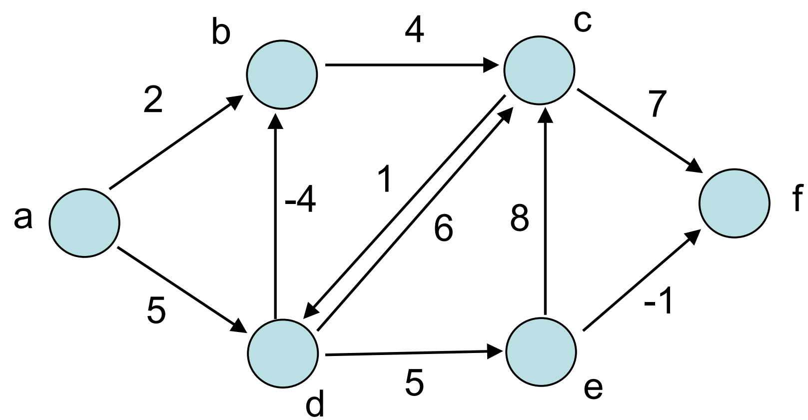
17. All Pairs Shortest Path (APSP)

All Pairs Shortest Path (APSP) Problem:

- Eingabe: Gewichteter Graph G=(V,E)
- Ausgabe: Für jedes Paar von Knoten $u,v \in V$ die Distanz von u nach v (und evtl. einen kürzesten Weg)

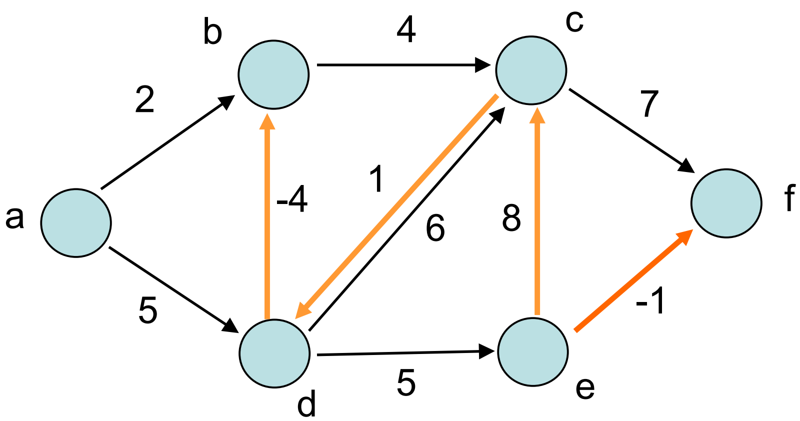
	a	b	c	d	e	f
a	0	1	5	5	10	9
b	∞	0	4	5	10	9
c	∞	-3	0	1	6	5
d	∞	-4	0	0	5	4
e	∞	5	8	9	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0



All Pairs Shortest Path (APSP):

- Eingabe: Gewichteter Graph G=(V,E)
- Ausgabe: Für jedes Paar von Knoten u,v∈V die Distanz von u nach v (und evtl. einen kürzesten Weg)

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	5	5	10	9
b	∞	0	4	5	10	9
c	∞	-3	0	1	6	5
d	∞	-4	0	0	5	4
e	∞	5	8	9	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0



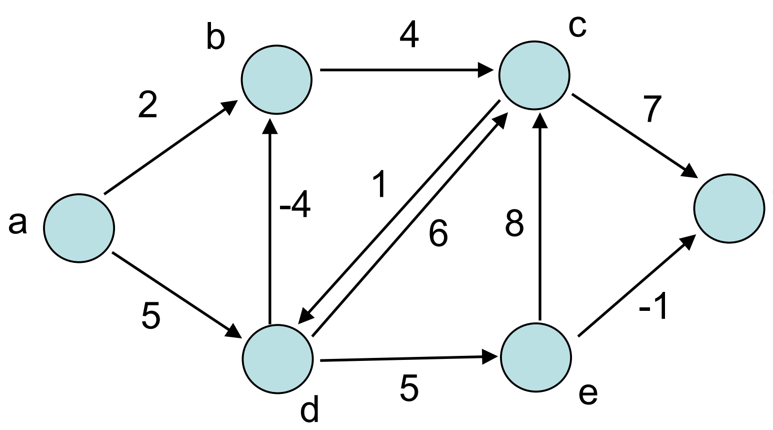
All Pairs Shortest Path

Eingabe APSP:

- Matrix $W=(w_{ij})$, die Graph repräsentiert

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } i=j \\ \text{Gewicht der ger. Kante } (i,j) & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \in E \\ \infty & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \end{cases}$$

	a	b	c	d	e	f
a	0	2	∞	5	∞	∞
b	∞	0	4	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	1	∞	7
d	∞	-4	6	0	5	∞
e	∞	∞	8	∞	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0



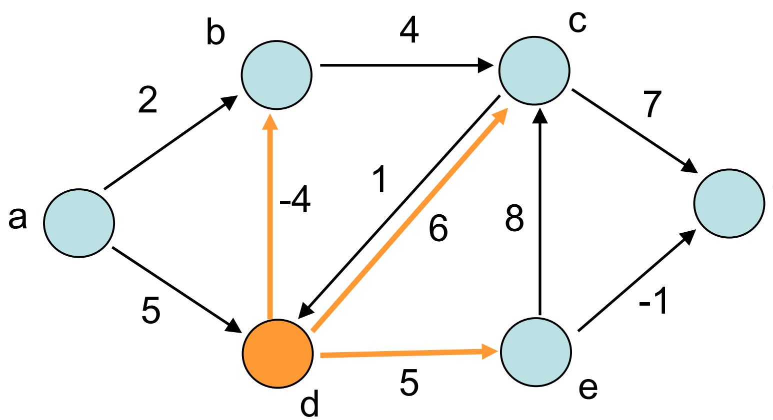
All Pairs Shortest Path

Eingabe APSP:

- Matrix $W=(w_{ij})$, die Graph repräsentiert

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } i=j \\ \text{Gewicht der ger. Kante } (i,j) & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \in E \\ \infty & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \end{cases}$$

	a	b	c	d	e	f
a	0	2	∞	5	∞	∞
b	∞	0	4	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	1	∞	7
d	∞	-4	6	0	5	∞
e	∞	∞	8	∞	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0



All Pairs Shortest Path

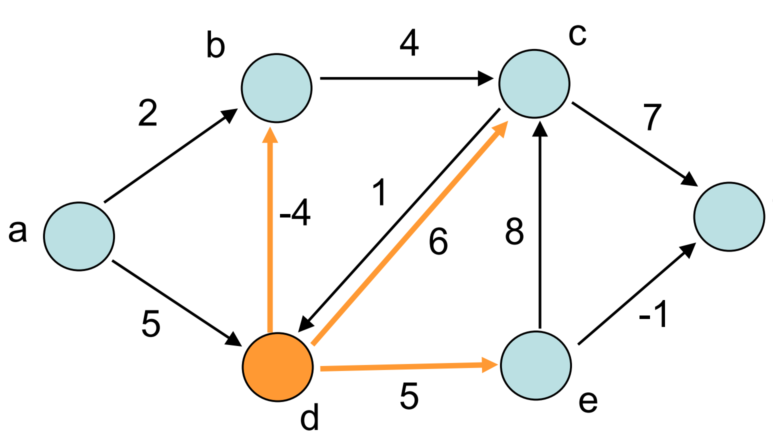
Annahme:
Keine negativen Zyklen!

Eingabe APSP:

- Matrix $W=(w_{ij})$, die Graph repräsentiert

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } i=j \\ \text{Gewicht der ger. Kante } (i,j) & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \in E \\ \infty & \text{, wenn } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \end{cases}$$

	a	b	c	d	e	f
a	0	2	∞	5	∞	∞
b	∞	0	4	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	1	∞	7
d	∞	-4	6	0	5	∞
e	∞	∞	8	∞	0	-1
f	∞	∞	∞	∞	∞	0

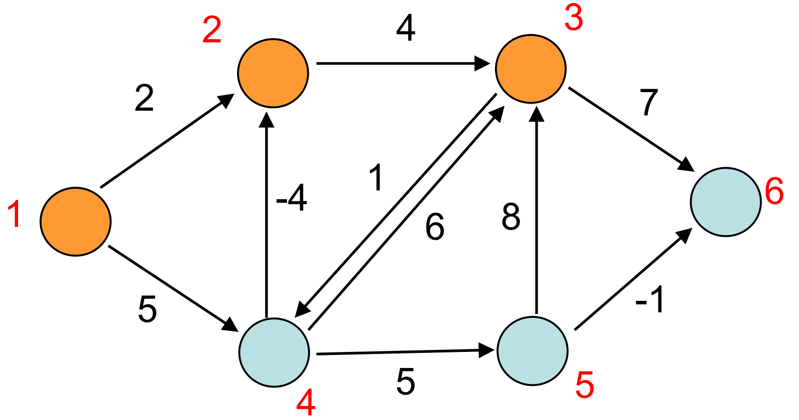


All Pairs Shortest Path

- Nummeriere Knoten von 1 bis n=|V|
- Betrachte kürzeste i-j-Wege, die nur über Knoten 1 bis k laufen

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	∞	-4	0	0	5	7
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

k=3

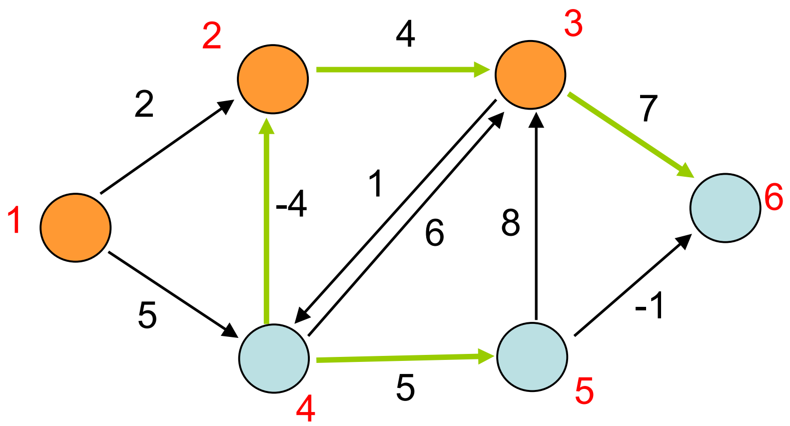


All Pairs Shortest Path

- Nummeriere Knoten von 1 bis n=|V|
- Betrachte kürzeste i-j-Wege, die nur über Knoten 1 bis k laufen

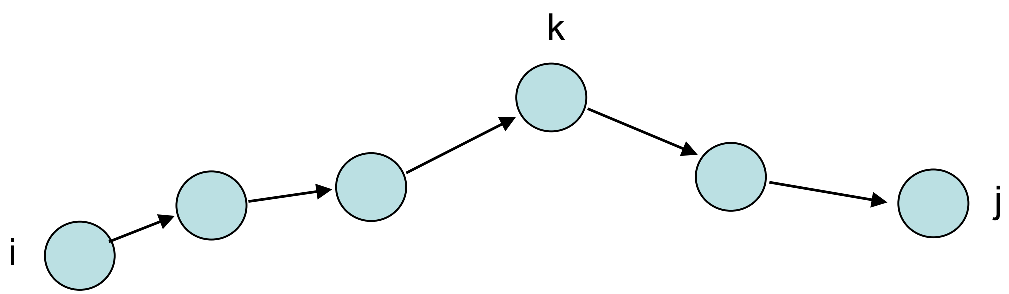
	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	∞	-4	0	0	5	7
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

k=3



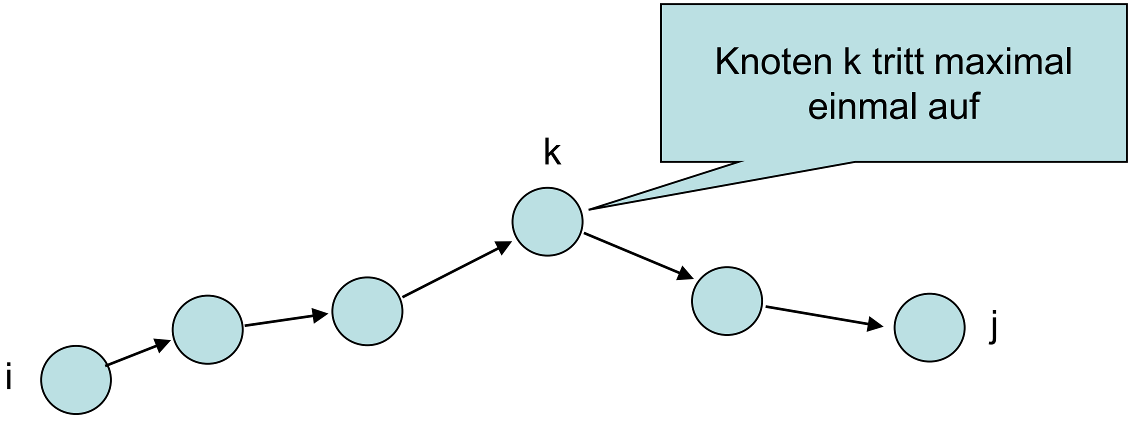
All Pairs Shortest Path

- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:



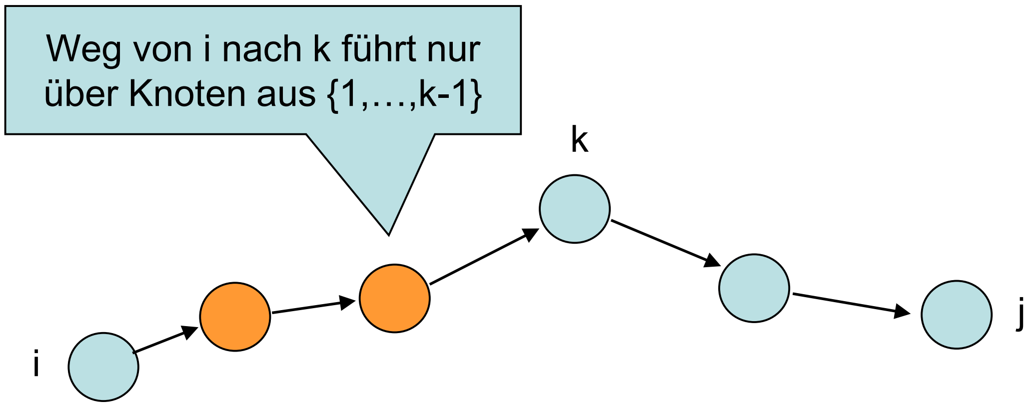
All Pairs Shortest Path

- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:



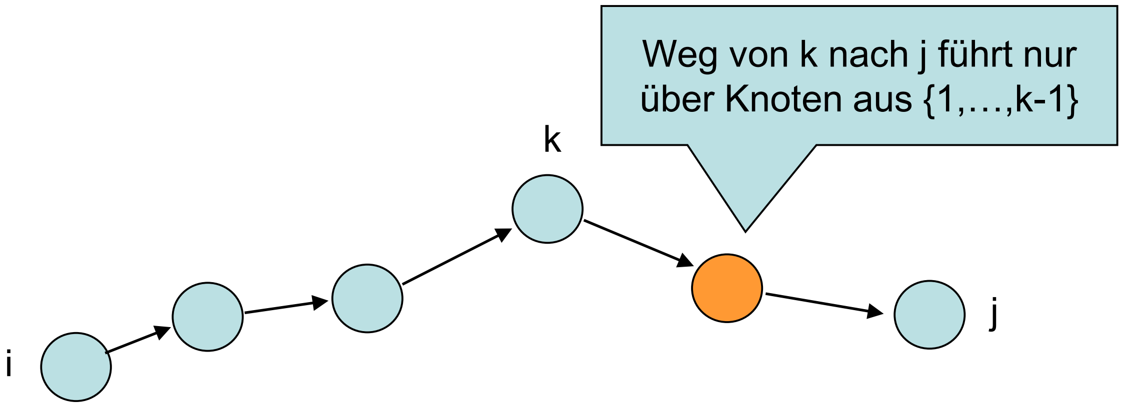
All Pairs Shortest Path

- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:



All Pairs Shortest Path

- Sei G ein Graph ohne negative Zyklen und sei j von i aus erreichbar. Dann gibt es einen kürzesten i-j-Weg, der keinen Knoten doppelt benutzt.
- Wir können also annehmen, dass jeder Knoten in jedem Weg maximal einmal vorkommt
- Betrachte i-j-Weg, der nur über Knoten aus {1,…,k} läuft:

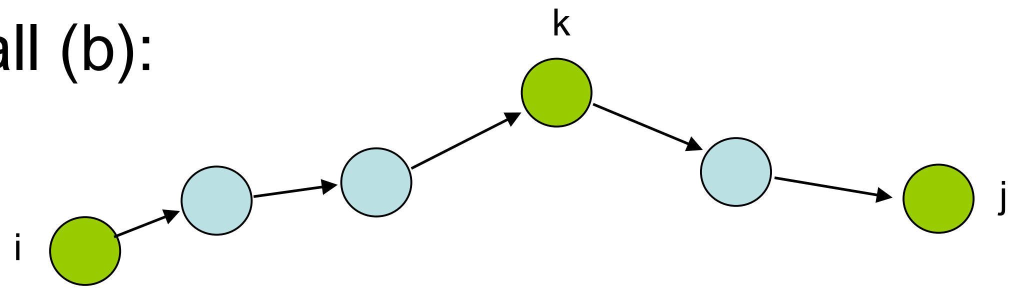


All Pairs Shortest Path

Die Rekursion:

- Kürzester i-j-Weg über Knoten aus {1,…,k} ist
- (a) kürzester i-j-Weg über Knoten aus {1,…,k-1} oder
- (b) kürzester i-k-Weg über Knoten aus {1,…,k-1} gefolgt von kürzestem k-j-Weg über Knoten aus {1,…,k-1}

Fall (b):



All Pairs Shortest Path

Die Rekursion:

- Sei $d_{ij}^{(k)}$ die Länge eines kürzesten i-j-Wegs mit über Knoten aus {1,…,k}

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{, falls } k=0 \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right) & \text{, falls } k \geq 1 \end{cases}$$

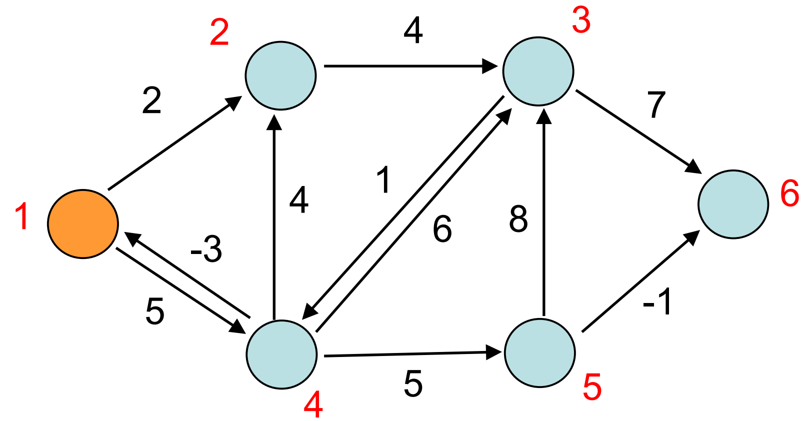
- Matrix $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ enthält die gesuchte Lösung

All Pairs Shortest Path

Floyd-Warshall(W,n)

1. $D^{(0)} \leftarrow W$
2. **for** $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
3.   **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
4.   **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
5. $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
6. **return** $D^{(n)}$

All Pairs Shortest Path



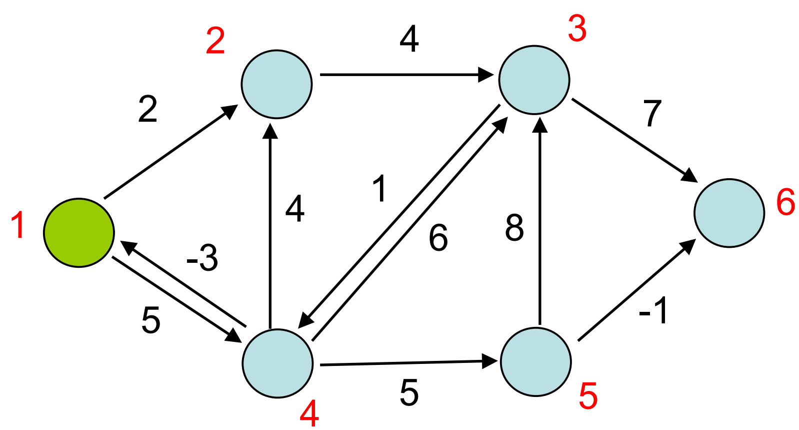
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



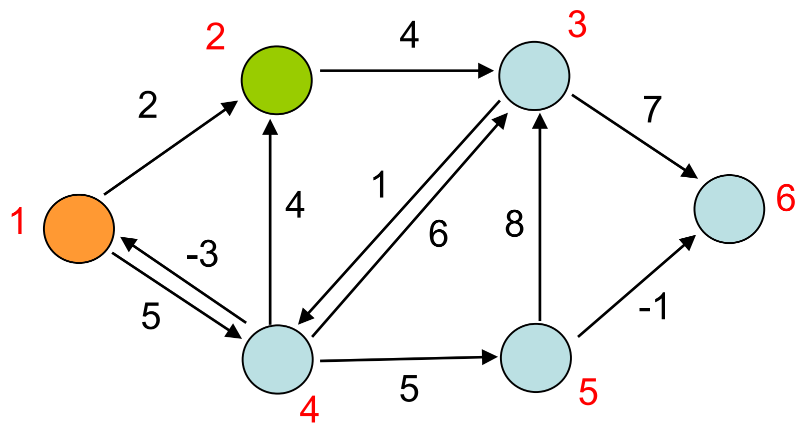
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



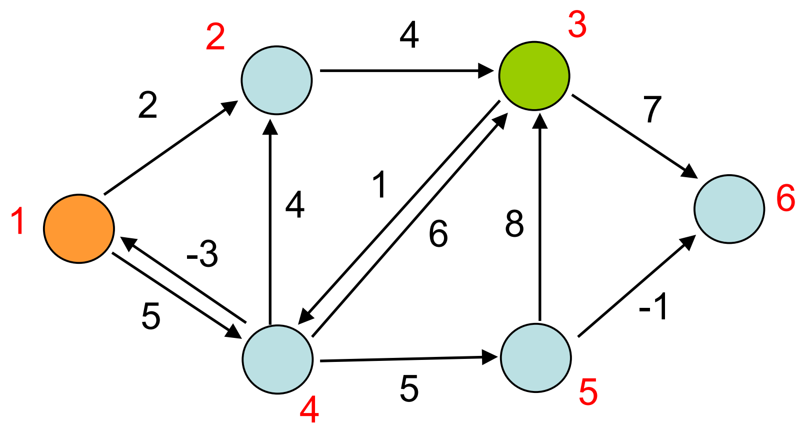
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



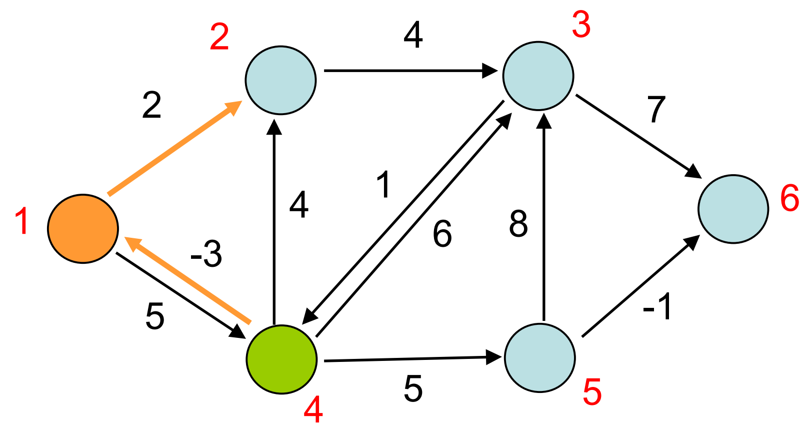
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



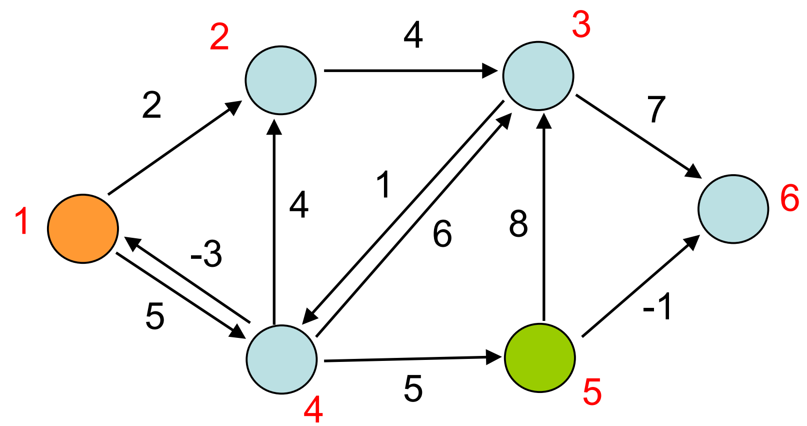
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5						
6						

All Pairs Shortest Path



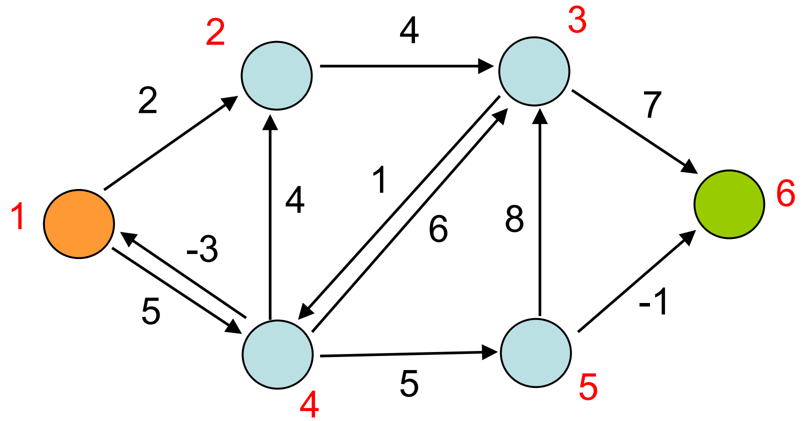
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6						

All Pairs Shortest Path



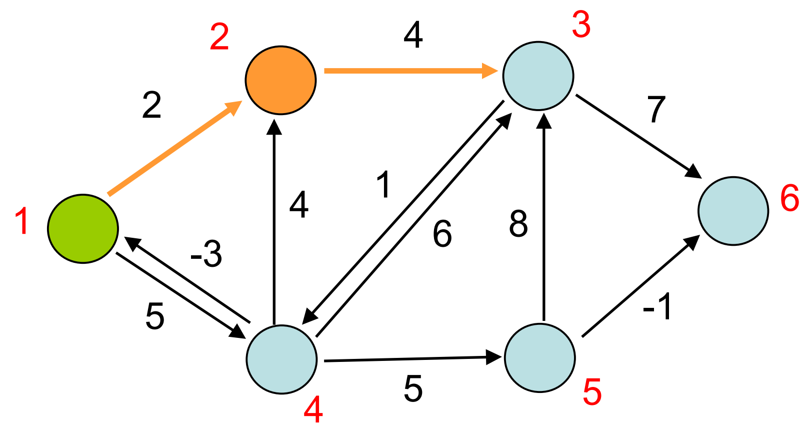
$D^{(0)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	4	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



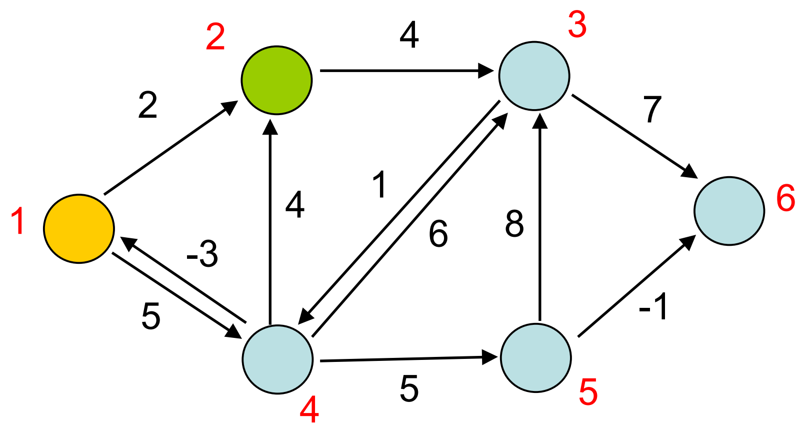
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



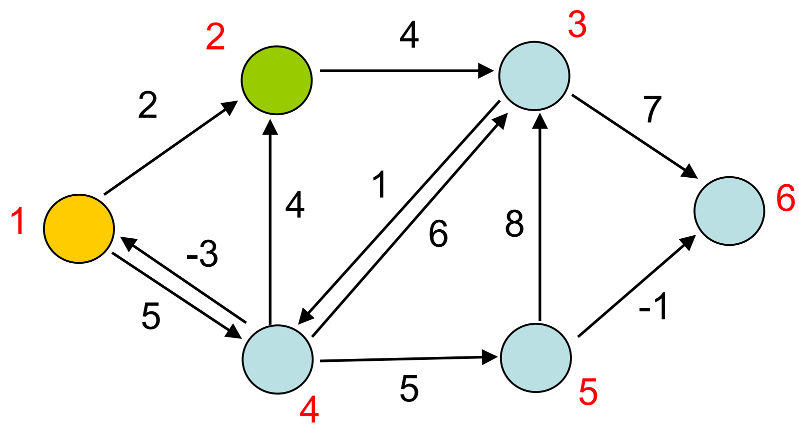
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



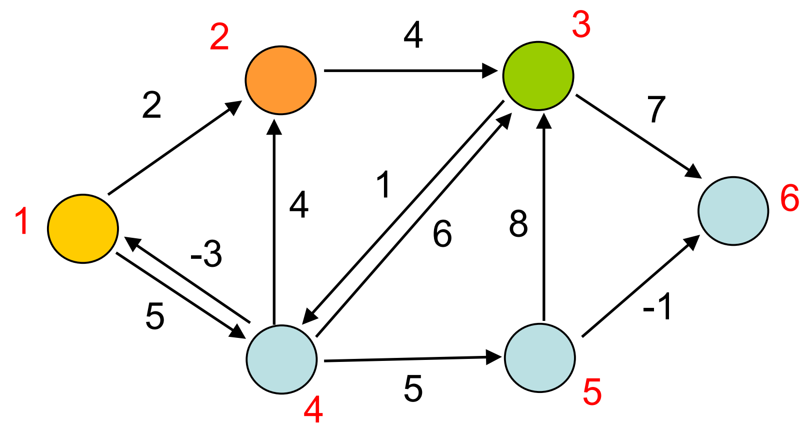
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



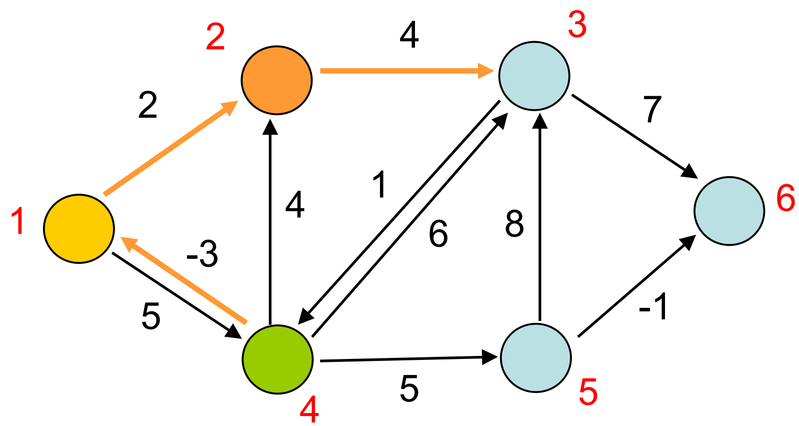
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



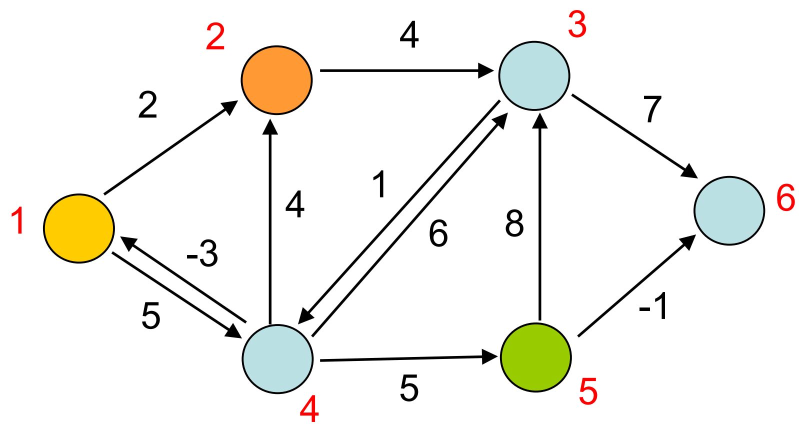
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5						
6						

All Pairs Shortest Path



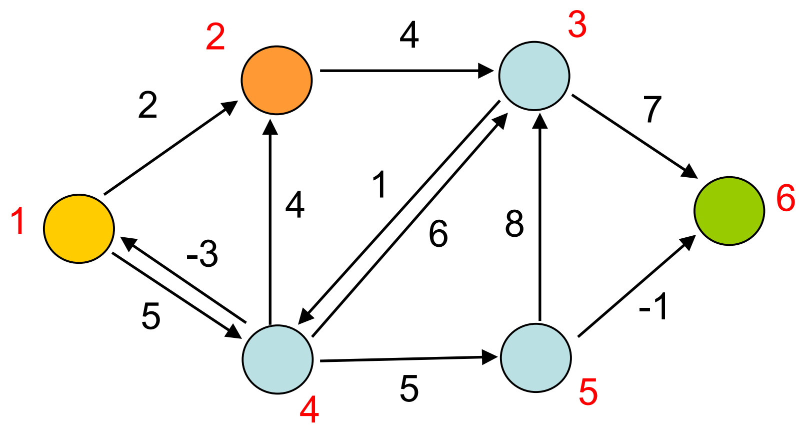
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6						

All Pairs Shortest Path



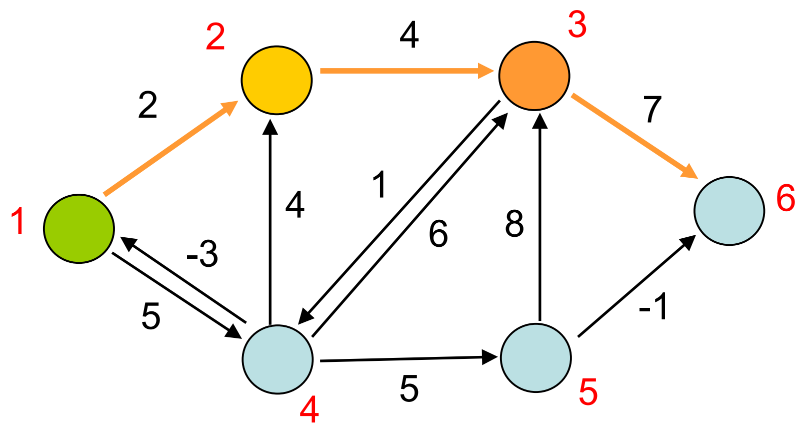
$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	6	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



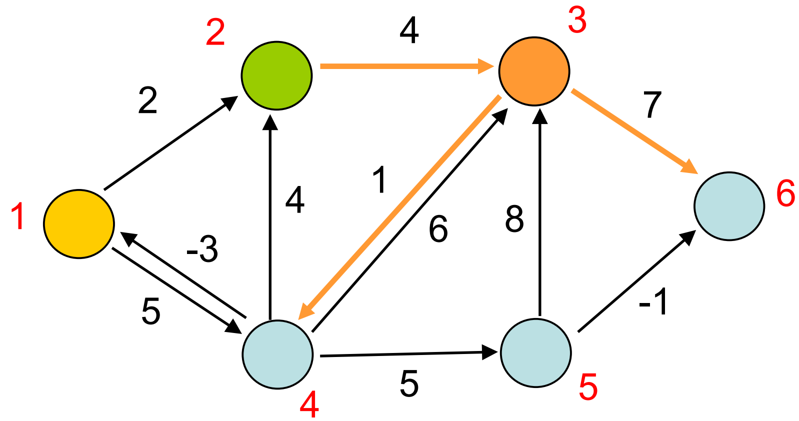
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



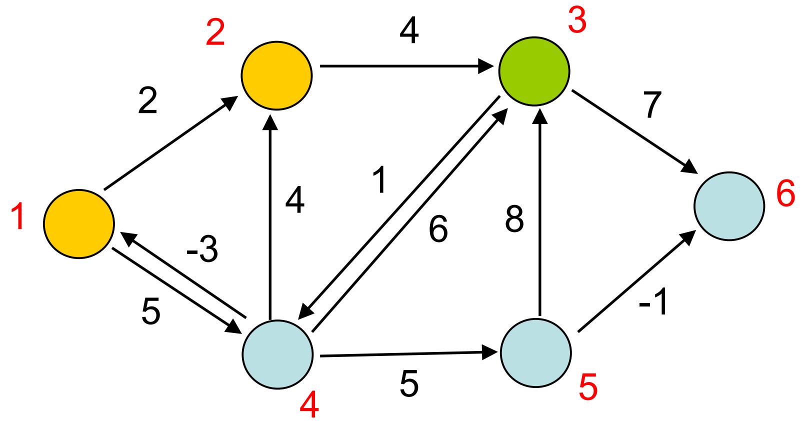
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



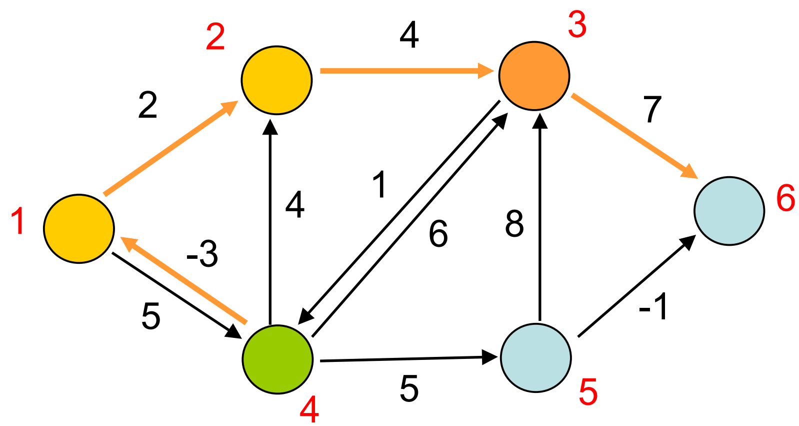
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



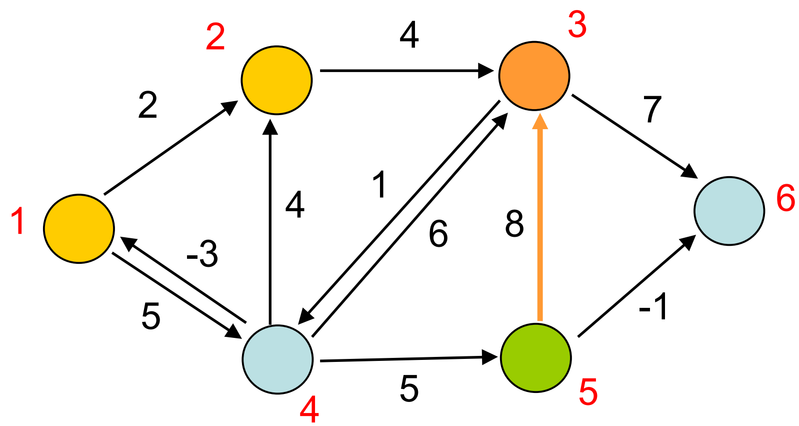
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5						
6						

All Pairs Shortest Path



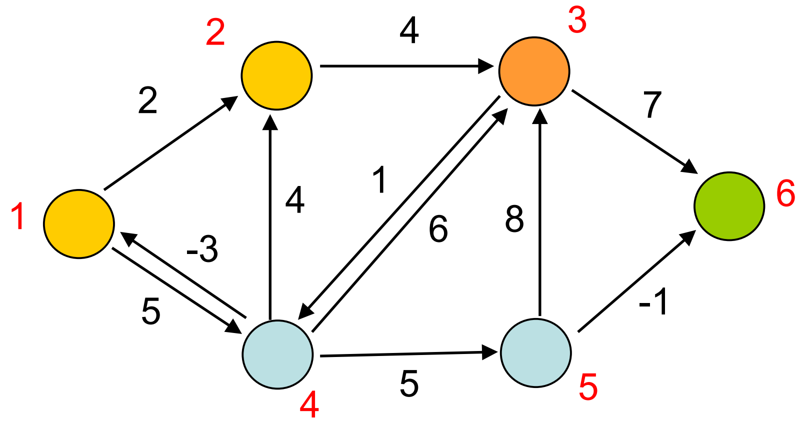
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6						

All Pairs Shortest Path



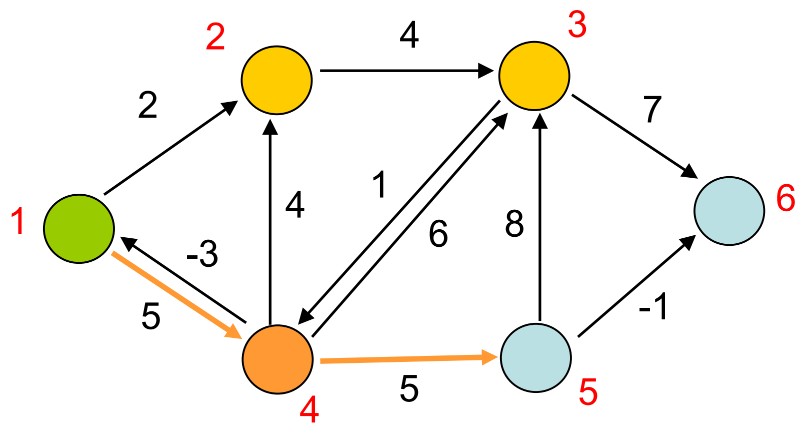
$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	∞
2	∞	0	4	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	∞
5	∞	∞	8	∞	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



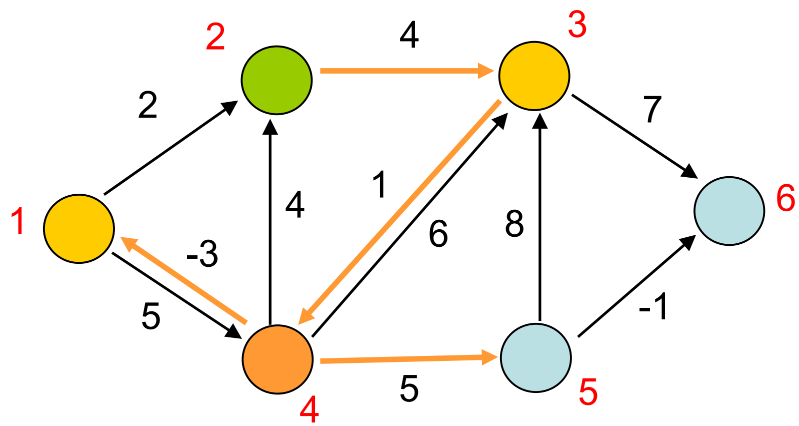
$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



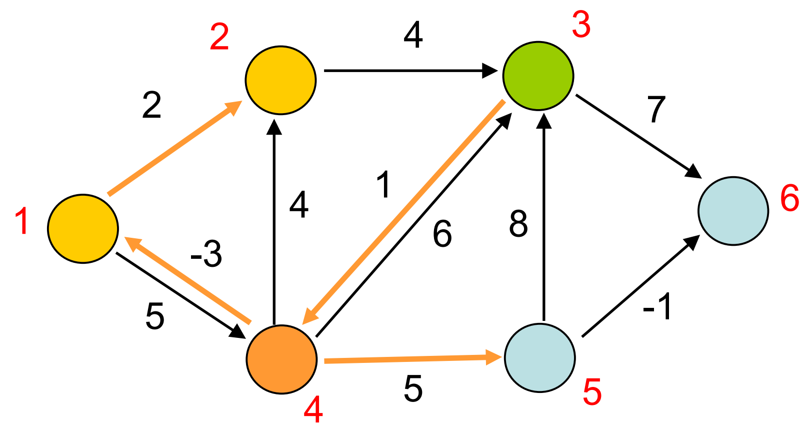
$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



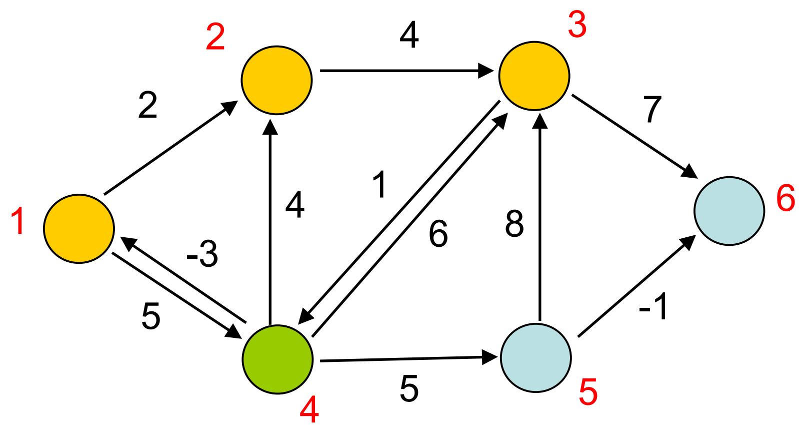
D(3)

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

D(4)

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



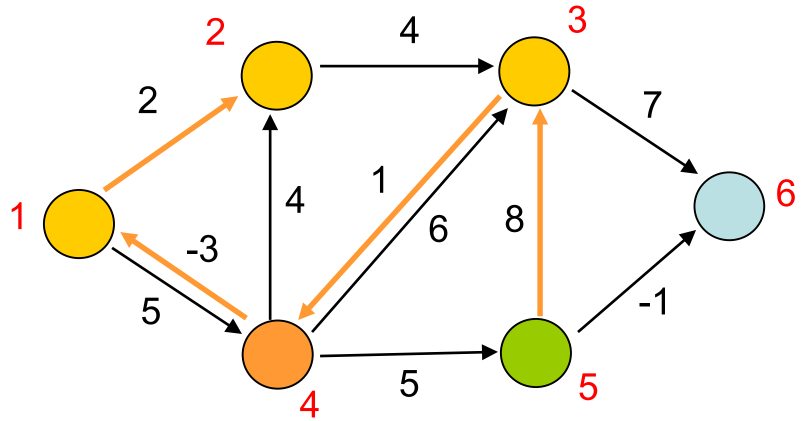
$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5						
6						

All Pairs Shortest Path



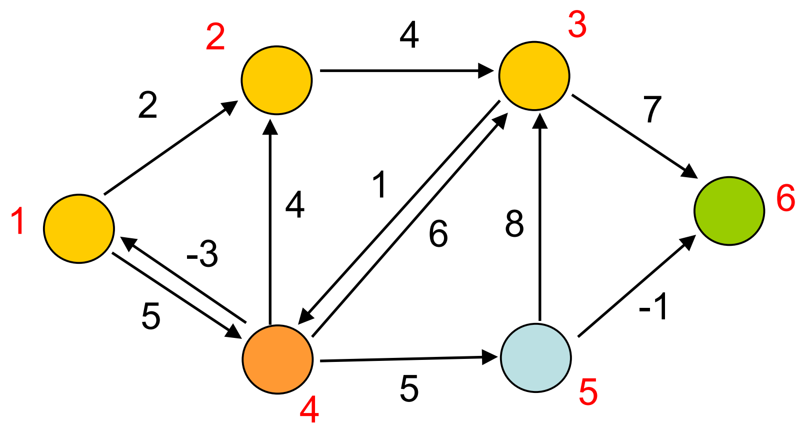
$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6						

All Pairs Shortest Path



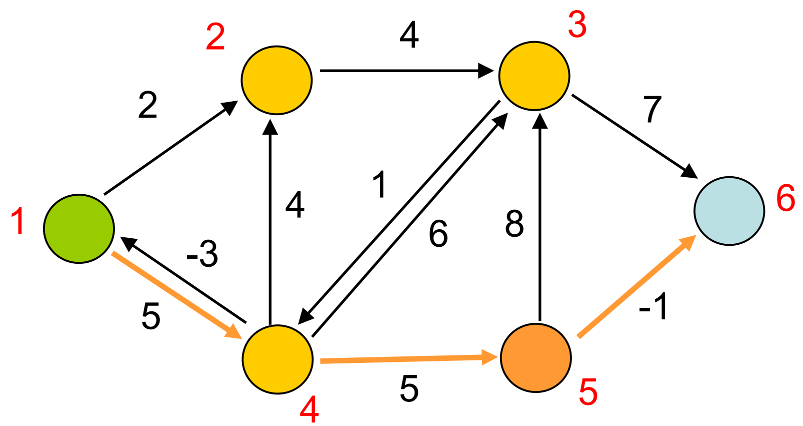
$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	∞	13
2	∞	0	4	5	∞	11
3	∞	∞	0	1	∞	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	∞	∞	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



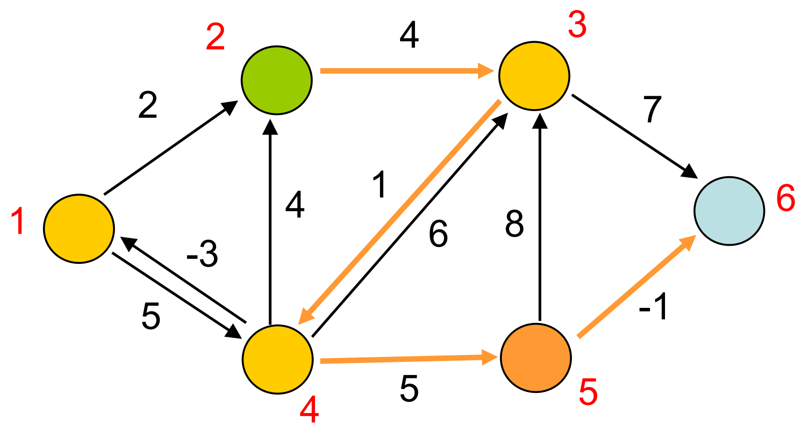
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2						
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



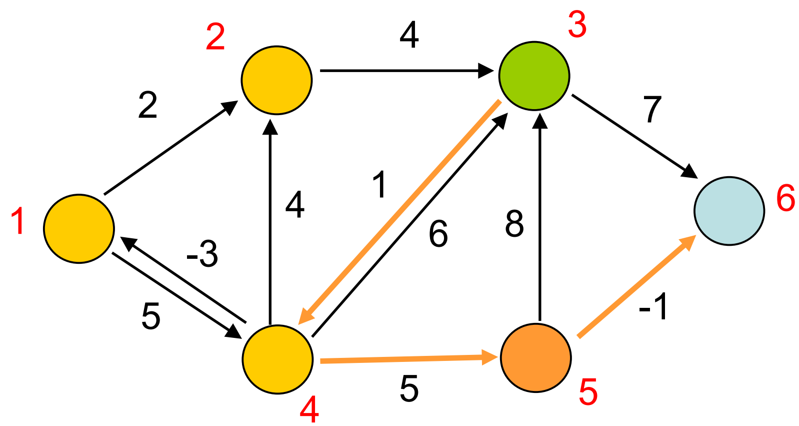
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3						
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



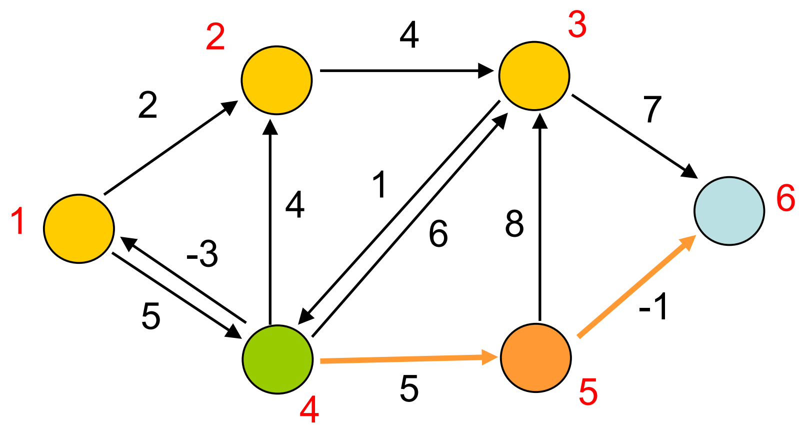
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4						
5						
6						

All Pairs Shortest Path



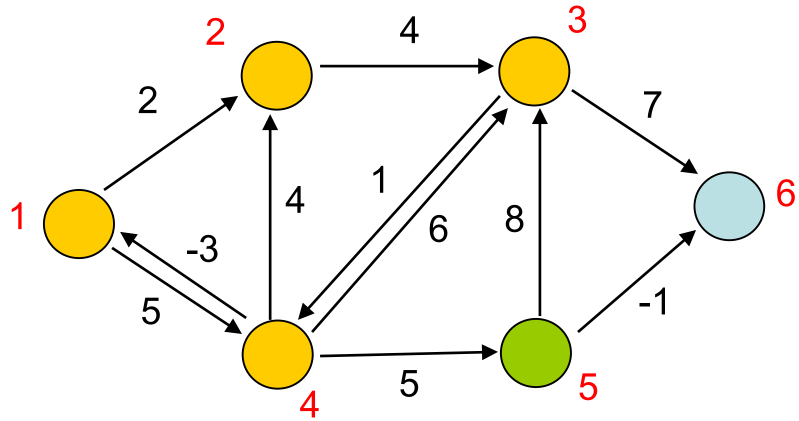
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5						
6						

All Pairs Shortest Path



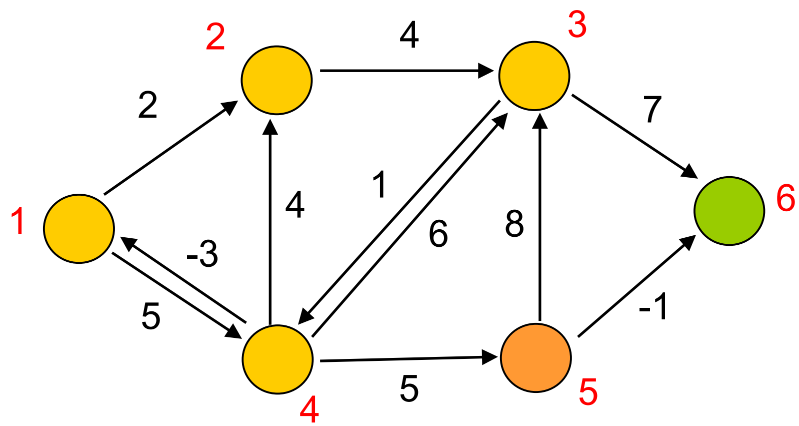
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6						

All Pairs Shortest Path



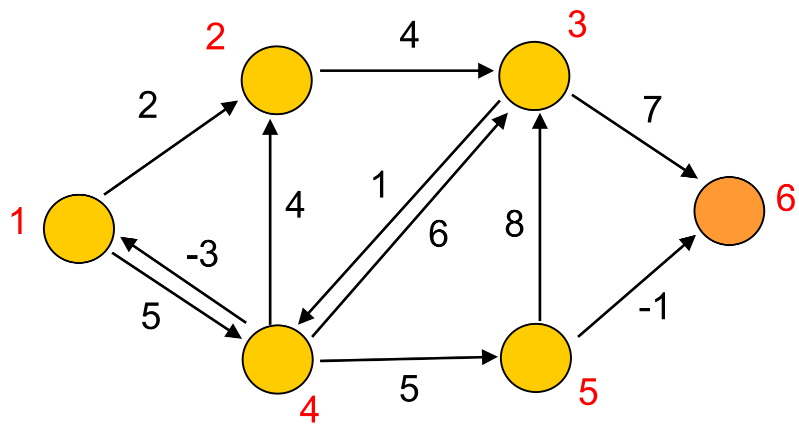
$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	13
2	2	0	4	5	10	11
3	-2	0	0	1	6	7
4	-3	-1	3	0	5	10
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



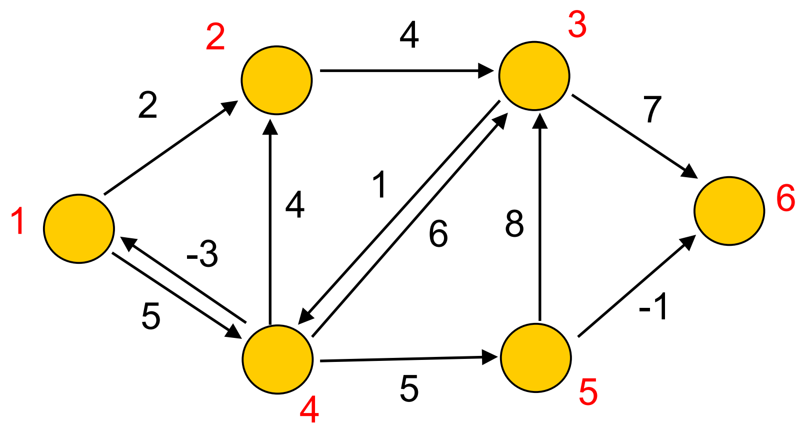
$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(6)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path



$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

$D^{(6)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	5	10	9
2	2	0	4	5	10	9
3	-2	0	0	1	6	5
4	-3	-1	3	0	5	4
5	6	8	8	9	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

All Pairs Shortest Path

Satz 17.1:

Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit nicht-negativen Zyklen. Dann berechnet der Algorithmus von Floyd-Warshall die Entfernung zwischen jedem Knotenpaar in $O(|V|^3)$ Zeit.

All Pairs Shortest Path

Aufrechterhalten der kürzesten Wege:

- Konstruiere Vorgängermatrix Π
- Dazu konstruiere Sequenz $\Pi^{(1)},\ldots,\Pi^{(n)}$ mit $\Pi = \Pi^{(n)}$
- $\Pi^{(k)}$ ist Vorgängermatrix zu $D^{(k)}$
- $\pi_{ij}^{(k)}$ ist Vorgänger von Knoten j auf dem kürzesten Weg von Knoten i über Knoten aus {1,…,k}
- Die Startmatrix:

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \textbf{nil} & \text{, falls } i=j \text{ oder } w_{ij}=\infty \\ i & \text{, falls } i\neq j \text{ und } w_{ij}<\infty \end{cases}$$

All Pairs Shortest Path

Aufrechterhalten der kürzesten Wege:

- Konstruiere Vorgängermatrix Π
- Dazu konstruiere Sequenz $\Pi^{(1)},\ldots,\Pi^{(n)}$ mit $\Pi = \Pi^{(n)}$
- $\Pi^{(k)}$ ist Vorgängermatrix zu $D^{(k)}$
- $\pi_{ij}^{(k)}$ ist Vorgänger von Knoten j auf dem kürzesten Weg von Knoten i über Knoten aus {1,…,k}
- Das Aktualisieren:

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)}, \text{ falls } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)}, \text{ falls } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$