Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

$|S|$: **Kardinalität** einer Menge S (Anzahl ihrer Elemente)

Wie vergleichen wir die Kardinalität unendlicher Mengen?

$|A| \geq |B| :\Leftrightarrow$ es gibt eine surjektive Abbildung von A nach B

$|A| = |B| :\Leftrightarrow |A| \geq |B|$ und $|B| \geq |A|$

Zwei Mengen A und B sind **isomorph** ($A \simeq B$):
Es gibt eine Bijektion von A nach B (bzw. B nach A).

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

$|A| \geq |B| :\Leftrightarrow$ es gibt eine surjektive Abbildung von A nach B

$|A| = |B| :\Leftrightarrow$ $|A| \geq |B|$ und $|B| \geq |A|$

Zwei Mengen A und B sind isomorph ($A \simeq B$):
Es gibt eine Bijektion von A nach B (bzw. B nach A).

Satz 2.20 Seien A und B beliebige Mengen. Falls $A \simeq B$, dann ist $|A| = |B|$.

Beweis: Tafel

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Standardmengen:

- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$: Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$: Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}=\{x/y \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ y\in\mathbb{N}\}$: Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

Welche Aussage gilt für diese Mengen?

1. $|\mathbb{N}|<|\mathbb{Z}|<|\mathbb{Q}|<|\mathbb{R}|$
2. $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|$
3. Weder 1. noch 2. korrekt.

Georg Cantor (1874): $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|<|\mathbb{R}|$

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Satz 2.21 $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$.

Beweis:

$|\mathbb{Z}|\geq|\mathbb{N}|$:

- Da $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$, existiert eine surjektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$.
- Konkret: betrachte $g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$ mit $g(x)=1+|x|$.
- g surjektiv: für alle $y\in\mathbb{N}$ gilt: es gibt ein $x\in\mathbb{Z}$ mit $g(x)=y$, nämlich $x=y-1$.

$|\mathbb{N}|\geq|\mathbb{Z}|$:

- Betrachte $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$ mit $f(x)=(-1)^x \cdot\lfloor x/2\rfloor$
- f surjektiv: für alle $y\in\mathbb{Z}$ gilt: es gibt ein $x\in\mathbb{N}$ mit $f(x)=y$, nämlich $x=2|y| + (|y|-y)/(2|y|)$ für $y\neq0$, sonst $x=1$

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Satz 2.22: $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|$.

Beweis:

$|\mathbb{Q}|\geq|\mathbb{Z}|$:

- Da $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$, existiert eine surjektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$.

$|\mathbb{Z}|\geq|\mathbb{Q}|$:

- Wir nehmen vereinfachend an, alle Brüche $x/y\neq 0$ sind verschieden (obwohl z.B. $6/3=4/2$ ist).
- Können wir für diese Vereinfachung eine surjektive Funktion $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Q}$ finden, dann ist f offensichtlich auch surjektiv auf den rationalen Zahlen.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Surjektive Funktion g:$\mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$:

- **Wir können alle positiven Brüche wie folgt rigoros erfassen:**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4

…

- **Rigorose Aufzählung durch Diagonallauf:**
  1/1, 2/1, 1/2, 3/1, 2/2, 1/3, 4/1, 3/2, 2/3, …
- **g(i) = i-te Zahl des Diagonallaufs $\rightarrow$ g surjektiv**

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Surjektive Funktion h:$\mathbb{Z}_{-}\to\mathbb{Q}_{-}$:

- **Wir können alle negativen Brüche wie folgt rigoros erfassen:**

	-1	-2	-3	-4	-5
1	-1/1	-2/1	-3/1	-4/1	-5/1
2	-1/2	-2/2	-3/2	-4/2	-5/2
3	-1/3	-2/3	-3/3	-4/3	-5/3
4	-1/4	-2/4	-3/4	-4/4	-5/4

…

- **Rigorose Aufzählung durch Diagonallauf:**
  -1/1, -2/1, -1/2, -3/1, -2/2, -1/3, -4/1, -3/2, -2/3, …
- **h(-i) = i-te Zahl des Diagonallaufs → h surjektiv**

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Surjektive Funktion $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Q}$:

- **Setze $f(i)=g(i)$ und $f(-i)=h(-i)$ für alle $i\in\mathbb{N}$ und $f(0)=0$.**

Damit ist Satz 2.22 gezeigt.

Korollar 2.23 **$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}|$.**

Satz 2.24 **Für jedes $k\in\mathbb{N}$ ist $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}^k|$.**
Beweis: Übung.

Im Lichte dieses Resultats könnte es naheliegen zu glauben, dass alle unendliche Mengen die gleiche Kardinalität haben. Das gilt allerdings nicht.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp(M)=\{\, U \mid U \subseteq M \,\}$: **Potenzmenge** von M

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\mathbb{R}|\geq|\wp(\mathbb{N})|$:

- Für jedes (binär codierte) $x\in[0,1]$ sei $b(x)$ der Binär-string, der sich aus Nachkommastellen von x ergibt.
  Beispiel: $x=0{,}6875 \rightarrow (x)_2=0{,}1011 \rightarrow b(x)=1011$
- **Problem:** ein $x\in[0,1]$ kann **zwei verschiedene** Binärkodierungen haben:
  z.B. $(x)_2=0{,}1011$ oder $(x)_2=0{,}1010111111\ldots..$
- Denn: $\Sigma_{i\geq k}\ 1/2^i = 1/2^{k-1}$.
- $(x)_2=0{,}1011$: **kanonische** Binärkodierung von x

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp$(M)={ U | U⊆M }: **Potenzmenge** von M

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\mathbb{R}|\geq|\wp(\mathbb{N})|$:

- Für jedes (binär codierte) $x\in[0,1]$ sei b(x) der Binärstring, der sich aus kanonischer Binärkodierung von x ergibt.
- Binärstring aus alternativer Kodierung: b´(x) (existiert nur, wenn x>0 und b(x) endlich ist, sonst nehmen wir an, dass b´(x)=b(x) ist!)
- Sonderfall x=1: b(x)=b´(x)=11111…..

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp(M)=\{ U \mid U \subseteq M \}$: **Potenzmenge von M**

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\mathbb{R}|\geq|\wp(\mathbb{N})|$:

- Für Binärstring $w=w_1w_2w_3\ldots$ sei S_w die Menge, die genau die Zahlen $i\in\mathbb{N}$ enthält mit $w_i=1$.
- Betrachte nun $f:[0,1]\times\{0,1\}\rightarrow\wp(\mathbb{N})$ mit

$$f(x,i) = \begin{cases} S_{b(x)} & \text{falls } i=0 \\ S_{b'(x)} & \text{falls } i=1 \end{cases}$$

Behauptung: f ist surjektiv. Beweis: Tafel

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp$(M)={ U | U⊆M }: **Potenzmenge** von M

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\mathbb{R}|\geq|\wp(\mathbb{N})|$:

- Damit ist die Funktion $g:[-1,1]\to\wp(\mathbb{N})$ mit $g(x)=f(|x|,0)$ falls $x<0$ und sonst $g(x)=f(x,1)$ auch surjektiv.
- Da $[-1,1]\subseteq\mathbb{R}$, folgt somit, dass $|\mathbb{R}|\geq|\wp(\mathbb{N})|$.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp(M)=\{ U \mid U\subseteq M \}$: **Potenzmenge** von M

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\wp(\mathbb{N})|\geq|\mathbb{R}|$:

- Für eine Menge $S\in\wp(\mathbb{N})$ sei w(S) der Binärstring, in dem das i-te Bit 1 ist genau dann wenn $i\in S$.
- Für einen Binärstring w sei x_w die Zahl mit folgenden Eigenschaften
  - w_1: Vorzeichen von x_w
  - w_i\`s mit geradem i: Vorkommastellen von x_w
  - w_i\`s mit ungeradem i: Nachkommastellen von x_w

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

- Für einen Binärstring w sei x_w die Zahl mit folgenden Eigenschaften
  - w_1: Vorzeichen von x_w
  - w_i`s mit geradem i: Vorkommastellen von x_w
  - w_i`s mit ungeradem i: Nachkommastellen von x_w

Beispiel:
w=10111 $\rightarrow$ $(-10,11)_2$ = -2,75

Beachte: x muss keine reelle Zahl sein, da es potentiell unendlich viele Vorkommastellen geben kann!
Aber: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es einen Binärstring w mit $x=x_w$.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Erinnerung: $\wp(M)=\{ U \mid U \subseteq M \}$: Potenzmenge von M

Satz 2.25 $|\mathbb{R}|=|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

$|\wp(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{R}|$:

- **Betrachte nun die Abbildung f mit $f(S)=x_{w(S)}$ für alle $S \in \wp(\mathbb{N})$.**
- **Wie wir gesehen haben, ist f surjektiv auf $\mathbb{R}$.**
- **Also ist $|\wp(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{R}|$.**

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Satz 2.26 $|\mathbb{N}|<|\wp(\mathbb{N})|$.

Beweis:

- Wir zeigen den Satz durch einen Widerspruchsbeweis.
- Angenommen, es gäbe eine surjektive Abbildung $f:\mathbb{N}\to\wp(\mathbb{N})$. Sei f eine Abbildung mit dieser Eigenschaft.
- Betrachte folgende Tabelle, wobei $S_x=f(x)$.

Ist j in S_i?	1	2	3	4	
S_1	**Ja**	Nein	Ja	Nein	
S_2	Nein	**Ja**	Nein	Ja	…
S_3	Ja	Ja	**Nein**	Nein	

⋮

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

- Betrachte folgende Tabelle, wobei S_x=f(x).

Ist j in S_i?	1	2	3	4	
S_1	**Ja**	Nein	Ja	Nein	
S_2	Nein	**Ja**	Nein	Ja	…
S_3	Ja	Ja	**Nein**	Nein	

⋮

- Sei S={ $i \in \mathbb{N}$ \| $i \notin S_i$ } (alle diag. Anworten umgedreht)
- Behauptung: es gibt kein j mit f(j)=S.
  Beweis: Tafel
- Dann kann f aber nicht surjektiv sein. Widerspruch!

Methode: Cantorsches Diagonalisierungsverfahren

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Wir erhalten also:

$$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|<|\mathbb{R}|$$

Vermutung: Da $\bigcup_{i\geq 0} \mathbb{N}^i = \wp(\mathbb{N})$, ist damit auch $|\mathbb{N}|<|\bigcup_{i\geq 0} \mathbb{N}^i|$.
Aber diese Vermutung ist falsch!
Erinnerung: $\wp(\mathbb{N})=\{ U \mid U\subseteq\mathbb{N} \}$. Das beinhaltet auch unendlich große Mengen, welche nicht in $\bigcup_{i\geq 0} \mathbb{N}^i$ sind!
In der Tat gilt:

Satz 2.27 $|\mathbb{N}|=|\bigcup_{i\geq 0} \mathbb{N}^i|$.
Beweis: Übung

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Satz 2.26 $|\mathbb{N}|<|\wp(\mathbb{N})|$.

Satz 2.26 kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 2.28 Für jede Menge A gilt $|A|<|\wp(A)|$.
Beweis: Übung

Es gibt also keine größtmögliche Menge.
Insbesondere kann die Menge aller Mengen nicht existieren!

$\rightarrow$ siehe auch die Paradoxien im Skript

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

- $\mathcal{L}_{re}$: Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen
- $\mathcal{L}$: Menge aller Sprachen

Fundamentale Frage: Ist $\mathcal{L}_{re}=\mathcal{L}$?

Satz 2.29 Es gibt eine Sprache, die nicht rekursiv aufzählbar ist.

Beweis:

- Jedes Entscheidungsproblem kann als Sprache $L\subseteq\{0,1\}^*$ dargestellt werden (Eingaben sind binär kodiert).
- Also können wir für $\mathcal{L}$ annehmen, dass $\mathcal{L}=\wp(\{0,1\}^*)$.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

- **Jedes Entscheidungsproblem kann als Sprache $L\subseteq\{0,1\}^*$ dargestellt werden.**
- **Also können wir für $\mathcal{L}$ annehmen, dass $\mathcal{L}=\wp(\{0,1\}^*)$.**
- **Jede DTM M hat eindeutige Gödelnummer $\langle M\rangle$.**
- **Sei $\mathcal{M}\subseteq\{0,1\}^*$ die Menge aller Gödelnummern.**
- **Die Abbildung $f:\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{L}_{re}$ mit $f(\langle M\rangle)=L(M)$ ist surjektiv, denn für jedes $L\in\mathcal{L}_{re}$ muss es per Definition eine DTM M geben mit $L(M)=L$.**
- **Also ist $|\mathcal{M}|\geq|\mathcal{L}_{re}|$.**
- **Weiterhin ist $|\{0,1\}^*|\geq|\mathcal{M}|$, da $\mathcal{M}\subseteq\{0,1\}^*$.**
- **Aufgrund von Satz 2.28 ist $|\{0,1\}^*|<|\wp(\{0,1\}^*)|$.**
- **Also ist $|\mathcal{L}_{re}|\leq|\mathcal{M}|\leq|\{0,1\}^*|<|\wp(\{0,1\}^*)|=\mathcal{L}$.**

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Satz 2.30 Es gibt eine Sprache L, für die weder L noch $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind.
Beweis: Tafel

Helfen Orakel, so dass $\mathcal{L}_{re}=\mathcal{L}$ ist?

Sei $O \subseteq \{0,1\}^*$ eine beliebige Sprache.

Turingmaschine mit Orakel O: DTM mit drei speziellen Zuständen: $q_?$, q_y und q_n.

- $q_?$: fragt Orakel O, ob Wort rechts vom Kopf in O ist.
  - Ja: DTM wechselt in Zustand q_y.
  - Nein: DTM wechselt in Zustand q_n.
- Die restliche Rechnung der DTM ist wie vorher.

Existenz nicht rekursiv aufz. Sprachen

Sei $O \subseteq \{0,1\}^*$ eine beliebige Sprache.

Turingmaschine mit Orakel O: DTM mit drei speziellen Zuständen: $q_?$, q_y und q_n.

- $q_?$: fragt Orakel O, ob Wort rechts vom Kopf in O ist.
  - Ja: DTM wechselt in Zustand q_y.
  - Nein: DTM wechselt in Zustand q_n.
- Die restliche Rechnung der DTM ist wie vorher.

Eine Sprache L ist **rekursiv aufzählbar bezüglich O**, falls $L=L(M^O)$ für eine DTM M^O mit Orakel O ist.
$\mathcal{L}_{re}^O$: Menge aller rek. aufz. Sprachen bezüglich O.

Satz 2.31 Für jedes Orakel O ist $\mathcal{L}_{re}^O \subset \mathcal{L}$.