Von Berechenbarkeit zu Komplexität

- **Berechenbarkeit in Bezug auf Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit betrachtet nur prinzipielle Lösbarkeit von Problemen auf Computern.**

- **Prinzipiell lösbare Probleme können praktisch nicht lösbar sein, weil jeder Algorithmus/DTM zur Lösung des Problems zu viel Zeit und/oder Platz benötigt.**

- **Komplexitätstheorie versucht Probleme gemäß des Zeit- und Platzbedarfs der besten DTMs zu ihrer Lösung zu klassifizieren.**

- **Konzentrieren uns auf Zeitbedarf und die Klassen P und NP.**

Vier Beispielprobleme

Minimumbestimmung

Gegeben: $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbb{N}$.

Gesucht: minimales a_i.

Sortieren

Gegeben: $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbb{N}$.

Gesucht: sortierte Reihenfolge $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \ \ldots \leq a_{\pi(n)}$.

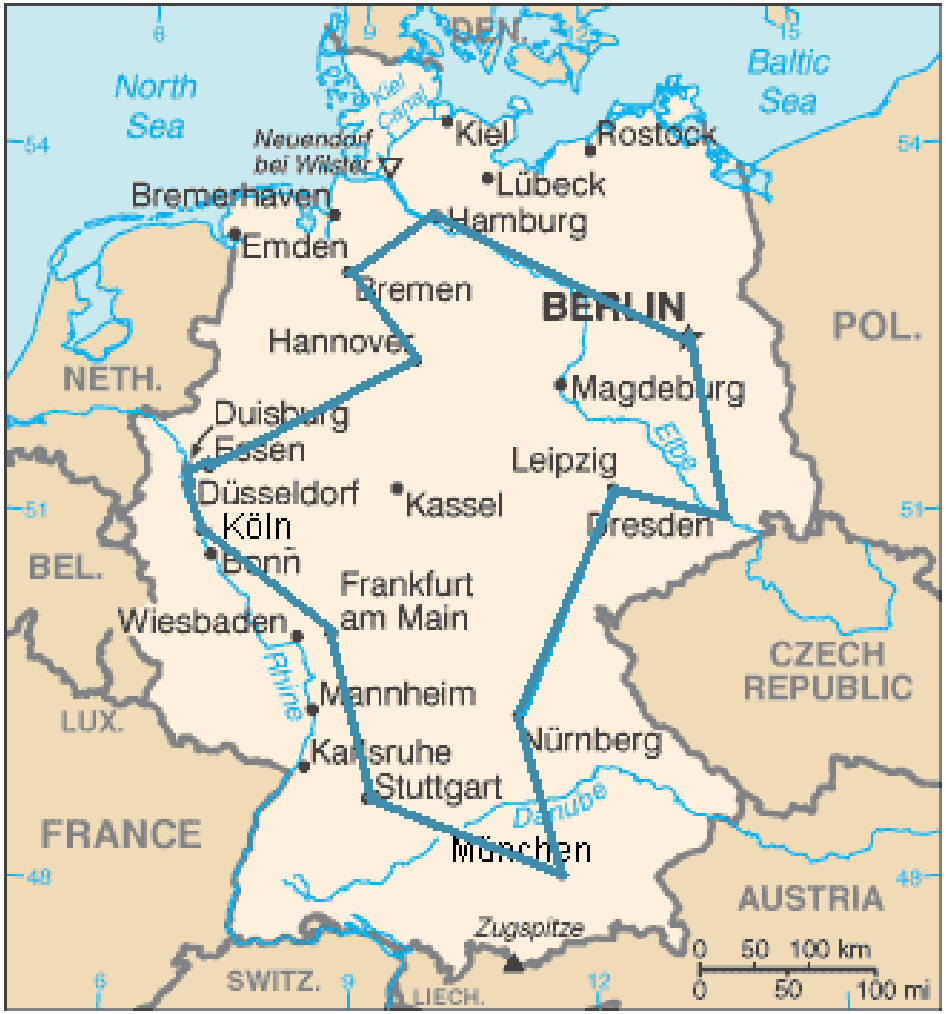
Vier Beispielprobleme

Travelling Salesman Problem

Gegeben: Städte $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und paarweise Distanzen d_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$.

Gesucht: Rundreise durch alle Städte minimaler Gesamtlänge.

Vier Beispielprobleme



Vier Beispielprobleme

Rucksackproblem

Gegeben: n Gegenstände mit Gewichten $g_1,g_2,\ldots,g_n$ und Werten $w_1,w_2,\ldots,w_n$ sowie zulässiges Gesamtgewicht G.

Gesucht: Teilmenge $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ mit $\sum_{i \in S} w_i$ ist maximal unter der Bedingung $\sum_{i \in S} g_i \leq G$.

Aufwand zur Lösung der Probleme

Problem	Laufzeit elementarer Algorithmen	Bemerkung
Minimum	O(n)	Anzahl Vergleiche
Sortieren	O(n·log(n))	Anzahl Vergleiche
TSP	O(n!)	Vergleiche & arithmetische Operationen
Rucksack	$O(2^n)$	Vergleiche & arithmetische Operationen

Laufzeitvergleiche

T(n)	Maximale Größe von n bei vorgegebener Rechenzeit			
	0,01 Sekunden	1 Sekunde	1Minute	1 Stunde
n	10	1000	60000	3600000
n·log(n)	4	140	4893	204094
n^2	3	31	244	1897
2^n	3	9	15	21
n!	3	6	8	9

bei 1000 Operationen pro Sekunde

Laufzeitvergleiche

T(n)	Maximale Eingabelänge vor Erhöhung der Rechengeschwindigkeit	Maximale Eingabelänge nach Erhöhung der Rechengeschwindigkeit	Bemerkungen
n	m	$10 \cdot m$	
$n \cdot \log(n)$	m	(fast) $10 \cdot m$	
n^2	m	$3.16 \cdot m$	$10^{1/2} \approx 3.16$
2^n	m	$m+3.3$	$\log(10) \approx 3.3$
$n!$	m	$\approx m$	

Erhöhung der Rechenleistung um den Faktor 10

O-Notation

1. $f = O(g) \Leftrightarrow \exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: f(n) \leq c \cdot g(n)$

   f wächst asymptotisch höchstens so schnell wie g

2. $f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$

   f wächst mindestens so schnell wie g

3. $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = O(g)$ und $f = \Omega(g)$

   f und g wachsen asymptotisch gleich schnell

4. $f = o(g) \Leftrightarrow \forall c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: f(n) \leq c \cdot g(n)$

   f wächst asymptotisch langsamer als g

5. $f = \omega(g) \Leftrightarrow g = o(f)$

   f wächst asymptotisch schneller als g

Laufzeit einer DTM

Definition 3.1 DTM M (Q,Σ,Γ,δ) halte bei jeder Eingabe.

- Für $w \in \Sigma^*$ ist $T_M(w)$ die Anzahl der Rechenschritte von M bei Eingabe w.
- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $T_M(n) := \max \{T_M(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$.
- $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Zeitkomplexität oder Laufzeit der DTM M.
- M hat Laufzeit $O(f(n))$, wenn $T_M(n) = O(f(n))$.

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

M_1 bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Durchlaufe die Eingabe. Falls eine 0 nach einer 1 auftaucht, lehne ab. Sonst zurück zum Bandanfang.

2. Wiederhole den folgenden Schritt, solange noch eine 0 *und* eine 1 auf dem Band steht.

3. Durchlaufe das Band und streiche die erste 0 und die letzte 1. Gehe zum Bandanfang zurück.

4. Falls noch eine 0, aber keine 1 oder eine 1, aber keine 0 auf dem Band steht, lehne ab. Sonst akzeptiere.

Klassen für Zeitkomplexität

Definition 3.2 Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Die Klasse DTIME(t(n)) ist dann definiert als

$$\text{DTIME}(t(n)) := \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ ist eine Sprache, die von einer DTM} \\ \text{mit Laufzeit } O(t(n)) \text{ entschieden wird.} \end{array} \right\}$$

DTM M_2 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

M_2 bei Eingabe $w\in\{0,1\}^*$:

1. Durchlaufe die Eingabe. Falls eine 0 nach einer 1 auftaucht, lehne ab. Sonst zurück zum Bandanfang.

2. Wiederhole die folgenden zwei Schritte, solange noch eine 0 und eine 1 auf dem Band steht.

3. Durchlaufe das Band, falls Anzahl 0 gerade und Anzahl 1 ungerade, oder umgekehrt, lehne ab.

4. Beginnend mit der ersten 0 und ersten 1, streiche jede zweite 0 und jede zweite 1.

5. Falls noch eine 0, aber keine 1 oder eine 1, aber keine 0 auf dem Band steht, lehne ab. Sonst akzeptiere.

2-DTM M_3 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

M_3 bei Eingabe $w\in\{0,1\}^*$:

1. Durchlaufe die Eingabe. Falls eine 0 nach einer 1 auftaucht, lehne ab. Sonst zurück zum Bandanfang.

2. Durchlaufe das erste Band bis zur ersten 1, kopiere jede 0 auf das zweite Band.

3. Gehe auf Band 1 an das Ende der Eingabe. Für jede 1 auf Band 1 streiche eine 0 auf Band 2. Steht zu einem Zeitpunkt keine 0 mehr zur Verfügung, lehne ab.

4. Ist keine 0 mehr auf Band 2 wenn das Ende der Eingabe auf Band 1 erreicht ist, akzeptiere, sonst lehne ab.

Klassen für Zeitkomplexität

Satz 3.3 **Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion mit $t(n) \geq n$ für alle n. Jede Mehrband DTM mit Laufzeit $t(n)$ kann durch eine 1-Band DTM mit Laufzeit $O(t(n)^2)$ simuliert werden.**

Speicherung von 2 Bändern durch 1 Band