Prof. Dr. Christian Scheideler　　　　Paderborn, den 27.03.2013

2. Klausur zur Vorlesung

Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und formale Sprachen

Wintersemester 2012/2013

— Bitte für den Klausuraufkleber freilassen. —

Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 84. Sie bestehen die Klausur, wenn Sie mindestens 42 Punkte erzielen.

Hinweis für Lehramtsstudent/Innen: Für die Bearbeitung steht Ihnen die Hälfte der regulären Zeit zur Verfügung. Die nachfolgende Aufteilung in die Bereiche Berechenbarkeit und Komplexität (BK) und Formale Sprachen (FS) ist zu berücksichtigen:

- Multiple-Choice: Teilaufgabe 1 - 5 (BK), Teilaufgabe 6 - 10 (FS)
- Aufgabe 2 - 4 (BK), Aufgabe 5 - 7 (FS)

Benutzen Sie **keinen Bleistift oder Rotstift!** Bitte schreiben Sie oben auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer (**bitte lesbar!**).

Es ist lediglich ein doppelseitig handbeschriebener DIN-A4-Zettel als Hilfsmittel zugelassen! Räumen Sie alles Weitere außer Ihrem Schreibmaterial und Ihrem Lichtbildausweis vom Tisch. Wer abschreibt **ODER** wer von sich abschreiben läßt, erhält die Endnote **5,0 (mangelhaft)**.

Schreiben Sie Lösungen bitte unter die Aufgabenstellung. Reicht der Platz nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite und die beigefügten Zusatzblätter. Weitere Blätter sind bei Bedarf erhältlich. Lösungen auf Zusatzblättern werden nur dann bewertet, wenn Sie diese bei der entsprechenden Aufgabe vermerken.

Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **genau eine Lösung**.

Viel Erfolg !

1	2	3	4	5	6	7	Σ
10	13	11	16	10	12	12	84

Klausur: ☐　Bonus: ☐　Endnote: ☐

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 1: (10 Punkte)

Kreuzen Sie pro Teilaufgabe höchstens ein Kästchen an. Für ein falsches Kreuz gibt es einen Minuspunkt, für ein richtiges einen Pluspunkt. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie keine Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird zu 0 aufgerundet.

(1) Die Sprache $L = \{\langle M\rangle w \mid M$ gestartet mit w hält$\}$ ist rekursiv aufzählbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(2) Die Sprache $L = \{\langle M\rangle w \mid M$ benötigt mindestens $|w|^2$ Zeichen auf dem Band bei Eingabe $w\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(3) Für jedes k gilt: t Zeitschritte einer k-Band Turingmaschine können in $O(k \cdot t^2)$ Zeitschritten durch eine 1-Band Turingmaschine simuliert werden.

☐ Richtig ☐ Falsch

(4) DTIME($t(n)$) ist die Menge aller Sprachen, die von einer DTM in Zeit $O(t(n))$ entschieden werden können.

☐ Richtig ☐ Falsch

(5) Eine Sprache A heißt *reduzierbar* auf B, falls es eine berechenbare Funktion f gibt mit $w \in A \Rightarrow f(w) \in B$.

☐ Richtig ☐ Falsch

(6) Für jede reguläre Sprache L gibt es einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert.

☐ Richtig ☐ Falsch

(7) Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \circ L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = v_1v_2$ mit $v_1 \in L_1$ und $v_2 \in L_2\}$ regulär.

☐ Richtig ☐ Falsch

(8) Die Menge der kontextfreien Sprachen ist bezüglich Komplement abgeschlossen.

☐ Richtig ☐ Falsch

(9) Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.

☐ Richtig ☐ Falsch

(10) Die Sprache $L = \{p \in 1^* \mid |p|$ ist eine Primzahl$\}$ ist kontextsensitiv.

☐ Richtig ☐ Falsch

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 2: (13 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine 3-Band Turingmaschine M, welche die folgende Sprache in linearer Zeit entscheidet:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in \{0,1\}^* : \; w = xx^R\}$$

Hinweis: Für $x = x_1 x_2 \dots x_n$ ist $x^R := x_n x_{n-1} \dots x_1$.

Verwenden Sie dazu folgende Tabellen, in der Sie die folgenden Arbeitsphasen umsetzen:

1. Kopiere w auf Band 2 und füge bei jedem zweiten kopierten Zeichen das Zeichen „0“ zu Band 3 hinzu. Ist die Länge von w ungerade, dann lehne w ab.
2. Laufe auf Band 1 und 3 zum Anfang zurück.
3. Laufe auf Band 1 und 3 nach rechts und auf Band 2 nach links bis auf Band 3 kein weiteres Zeichen zu finden ist. Überprüfe dabei jeweils das aktuelle Zeichen auf Band 1 und Band 2. Sind diese Zeichen ungleich, dann lehne die Eingabe ab. Sind bis zum Ende alle Zeichenpaare gleich, dann akzeptiere die Eingabe.

Beachten Sie dabei die folgenden Punkte:

- Für eine k-Band-Turingmaschine hat die Übergangsfunktion δ folgende Signatur:

$$\delta : Q \backslash \{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Sigma^k \to Q \times \Sigma^k \times \{R, L, N\}^k$$

  D. h. die Kopfpositionen dürfen bei Übergängen auch unverändert (N) bleiben.
- Sie müssen die Übergangsfunktion nicht für alle Symbole $a_1, a_2 \in \Sigma$ definieren, sondern lediglich für die von Ihnen benötigten. Sie dürfen annehmen, dass die Übergangsfunktion bei nicht definierten Eingaben direkt in den verwerfenden Zustand geht.
- Existieren ein Zustand $q \in Q \backslash \{q_{accept}, q_{reject}\}$ und Symbole $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_\ell, b_\ell \in \Sigma$ mit $\delta(q, a_i, b_i) = \delta(q, a_j, b_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $i \neq j$, brauchen Sie die Ausgabe von $\delta(q, a_i, b_i)$ nicht für alle a_i, b_i zu definieren. Definieren Sie stattdessen für die entsprechenden Eingabesymbole Variablen a, b mit $a \in \{a_1, \dots, a_\ell\}$, $b \in \{b_1, \dots, b_\ell\}$ und definieren Sie $\delta(q, a, b)$ nur einmal.
- Zur Veranschaulichung sind zwei Einträge in der unten angegebenen Tabelle bereits vorgegeben.
- Nicht jede Zeile und Spalte muss in den vorgegebenen Tabellen ausgefüllt werden.

b) Sei $t(n)$ eine in Zeit $O(t(n))$ berechenbare Funktion, d. h. es gibt eine (Mehrband-)TM M', die für eine gegebene binär kodierte Zahl n in Zeit $O(t(n))$ die binär kodierte Zahl $t(n)$ ausgeben kann. Zeigen Sie, dass dann gilt: Jede Sprache, die in Zeit $t(n)$ durch eine Mehrband-TM akzeptiert werden kann, kann in Zeit $O(t(n))$ durch eine Mehrband-TM entschieden werden.

Name:	Matrikelnummer:

Platz für Ihre Lösung zu Aufgabe 2a):

Definieren Sie hier Ihre verwendeten Variablen:

$a \in \{0, 1\}$

Phase 1:

δ	$(\triangleright, \triangleright, \triangleright)$	$(a, \sqcup, \sqcup)$			
q_0	$(q_0, \triangleright, \triangleright, R, R, R)$	$(q_1, a, a, \sqcup, R, R, N)$			
q_1					

Phase 2:

δ					

Phase 3:

δ					

Name:	Matrikelnummer:

Ersatztabelle für Aufgabe 2a)

Definieren Sie hier Ihre verwendeten Variablen:

$a \in \{0, 1\}$

Phase 1:

δ	$(\triangleright, \triangleright, \triangleright)$	$(a, \sqcup, \sqcup)$			
q_0	$(q_0, \triangleright, \triangleright, \triangleright, R, R, R)$	$(q_1, a, a, \sqcup, R, R, N)$			
q_1					

Phase 2:

δ					

Phase 3:

δ					

Name:	Matrikelnummer:

Platz für Ihre Lösung zu Aufgabe 2b):

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 3: (11 Punkte)

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Sprachen:

$$H = \{\langle M\rangle \mid M \text{ gestartet mit leerem Band hält}\}$$
$$L = \{\langle M\rangle x \mid M \text{ berechnet } x^2\}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass H unentscheidbar ist. Nutzen Sie das aus, um mittels Reduktion zu zeigen, dass dann auch L unentscheidbar ist.

b) Betrachten Sie die beiden folgenden Sprachen:

$$NE = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$
$$A = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \{0,1\}^*\}$$

NE ist ein unentscheidbares Problem. Nutzen Sie das aus, um mittels Reduktion zu zeigen, dass dann auch A unentscheidbar ist.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 4: (16 Punkte) Betrachten Sie die drei folgenden Probleme:

$$\begin{array}{lll} \textsc{SetCover} & = \{\langle N, S_1, \ldots, S_m, k\rangle \mid & N \text{ beliebige Menge, } m \in \mathbb{N} \\ & & S_1, \ldots, S_m \subseteq N, k \in \{1, \ldots, m\}, \\ & & \exists M \subseteq \{1, \ldots, m\},\ |M| \leq k : \\ & & \bigcup_{i \in M} S_i = N\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textsc{VertexCover} & = \{\langle G = (V, E), k\rangle \mid & G \text{ ungerichteter Graph, } k \in \{1, \ldots, |V|\}, \\ & & \exists U \subseteq V,\ |U| \leq k : \\ & & \forall \{u, v\} \in E : u \in U \ \vee v \in U\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textsc{DominatingSet} & = \{\langle G = (V, E), k\rangle \mid & G \text{ ungerichteter Graph, } k \in \{1, \ldots, |V|\}, \\ & & \exists U \subseteq V,\ |U| \leq k : \\ & & \forall v \in V :\ v \in U \vee \exists w \in U : (v, w) \in E\} \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass SetCover in NP ist.

b) Es ist bekannt, dass das VertexCover Problem NP-vollständig ist. Benutzen Sie das Problem VertexCover, um mittels Reduktion zu zeigen, dass auch SetCover NP-vollständig ist.

c) Es ist bekannt, dass das DominatingSet Problem auch NP-vollständig ist. Benutzen Sie das Problem DominatingSet, um mittels Reduktion zu zeigen, dass auch SetCover NP-vollständig ist.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 5: (10 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine reguläre Grammatik für den regulären Ausdruck

$$(0 \cup 11)^*(010 \cup 000)111(01 \cup 000)^*.$$

b) Wandeln Sie die erhaltene Grammatik in einen NFA in graphischer Darstellung um. Verwenden Sie hierbei zur Bezeichnung der Zustände des NFA die Variablennamen aus der von Ihnen erstellten Grammatik.

c) Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen gegenüber Komplementbildung abgeschlossen sind. Hinweis: Die Angabe einer Konstruktion alleine reicht nicht aus. Es muss auch nachgewiesen werden, dass ihre Konstruktion das gewünschte Ziel erreicht.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 6: (12 Punkte)

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache $L = \{0^*w1^*w^R0^* \mid w \in \{0,1\}^*\}$ an.

b) Konstruieren Sie graphisch aus der angegebenen kontextfreien Grammatik einen Kellerautomaten.

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$
$$V = \{S, A, B, C\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$P = \begin{cases} S \to 11S \mid 0AB \mid C \\ A \to 0A1B \mid B1A \\ B \to \epsilon \\ C \to 111 \mid S \end{cases}$$

c) Für zwei kontextfreie Sprachen L_1 und L_2 sei $L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 \mid w \notin L_2\}$. Sind die kontextfreien Sprachen bezüglich „\“ abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der in der Vorlesungen nachgewiesenen Abschlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

AUFGABE 7: (12 Punkte)

a) Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ ist ein Palindrom}\}$$

nicht regulär ist.

b) Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{ es gibt ein } w \in \{0,1\}^* \text{ mit } x = ww\}$$

nicht kontextfrei ist.

Platz für Ihre Lösung:

Name:	Matrikelnummer:

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)

Name:	Matrikelnummer:

Konzeptpapier (wird nur bewertet, wenn explizit gekennzeichnet!)