Proseminar Effiziente Algorithmen

Kapitel 2: Datenstrukturen

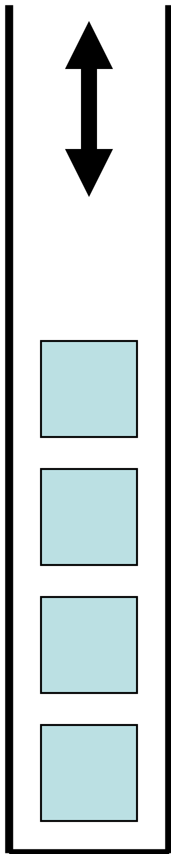
Prof. Dr. Christian Scheideler

WS 2018

Übersicht

- Stacks
- Queues
- Dictionaries
- Priority Queues
- Mengen
- Probleme im Bereich Datenstrukturen

Stack

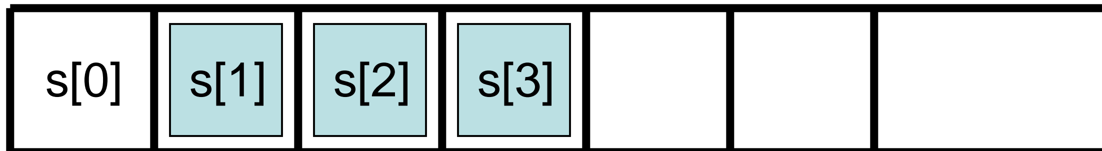


Operationen:

- Init(s): erzeuge leeren Stack s
- Push(x,s): packe x auf Stack s
- Pop(s): entferne oberstes Element von s
- Empty(s): testet, ob Stack s leer ist

Stack ganzer Zahlen

- Implementierung als Array:



Größe (anfangs 0)

Push(x):

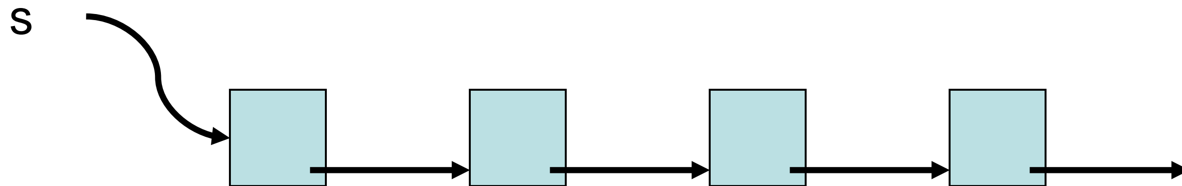
```
s[0] = s[0]+1;
s[s[0]] = x;
```

Pop():

```
if (s[0]==0) return -1;
s[0] = s[0]-1;
return s[s[0]+1];
```

Stack ganzer Zahlen

- Implementierung als Pointer-Struktur:




```
class stackel {
   int zahl;
   stackel *nachf; };

stackel *s = NULL;
```

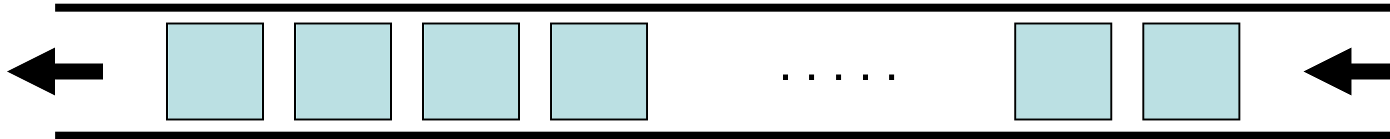
Push(x):

```
q = new stackel;
q->zahl = x;
q->nachf = s;
s = q;
```

Pop():

```
if (s==NULL) return s;
q = s; s = s->nachf;
return(q);
```

Queue

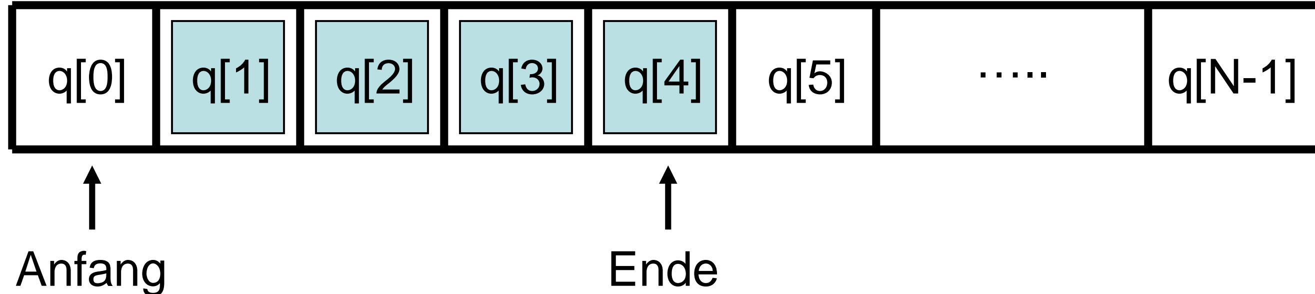


Operationen:

- Init(q): erzeugt eine leere Queue q
- Enqueue(x,q): hängt x hinten an Queue q an
- Dequeue(q): gibt Element vorne in der Queue zurück
- Empty(q): testet, ob Queue q leer ist

Queue ganzer Zahlen

- Implementierung als Array:




```
class queue {
   int q[N];
   int Anfang;
   int Ende; };

q = new queue;
q->Anfang=q->Ende=0;
```

Enqueue(x):

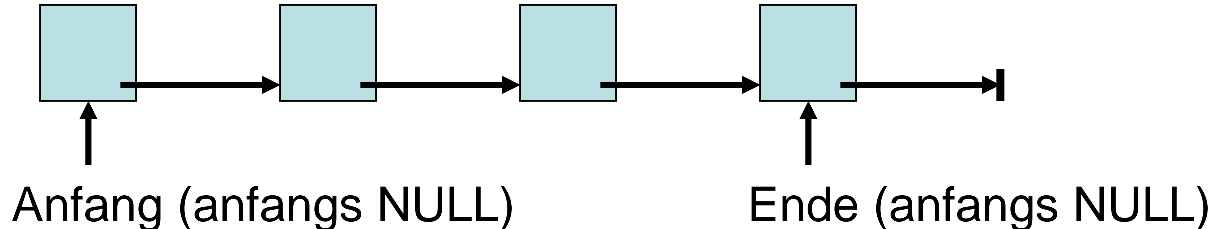
```
Ende=(Ende+1)%N;
q[Ende]=x;
```

Dequeue():

```
if (Anfang == Ende)
   return -1;
Anfang=(Anfang+1)%N;
return(q[Anfang]);
```

Queue ganzer Zahlen

- Implementierung als Pointer-Struktur:



Anfang (anfangs NULL)

Ende (anfangs NULL)

```
class queueel {
  int zahl;
  queueel *nachf; };

class queue {
  queueel *Anfang;
  queueel *Ende; };

q = new queue;
```

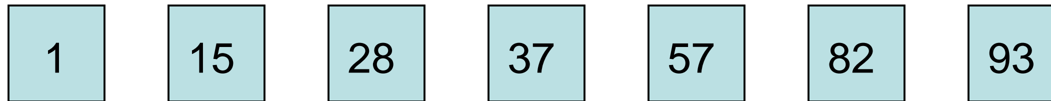
Enqueue(x):

```
p = new queueel;
p->zahl=x;
p->nachf=NULL;
if (Anfang==NULL)
  Anfang=Ende=p;
else {Ende->nachf=p;
  Ende = p; }
```

Dequeue():

```
if (Anfang == NULL)
  return NULL;
p = Anfang;
Anfang=Anfang->nachf;
if (Anfang == NULL)
  Ende=NULL;
return p;
```

Dictionary

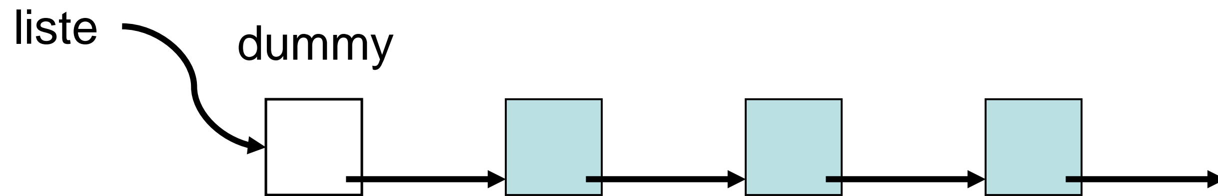


Operationen:

- Insert(x,d): füge x in das Dictionary d ein
- Delete(x,d): lösche x (Eintrag oder Schlüssel) vom Dictionary d
- Search(k,d): suche nach Eintrag mit Schlüssel k in d

Dictionary

- Implementierung als ungeordnete Liste:



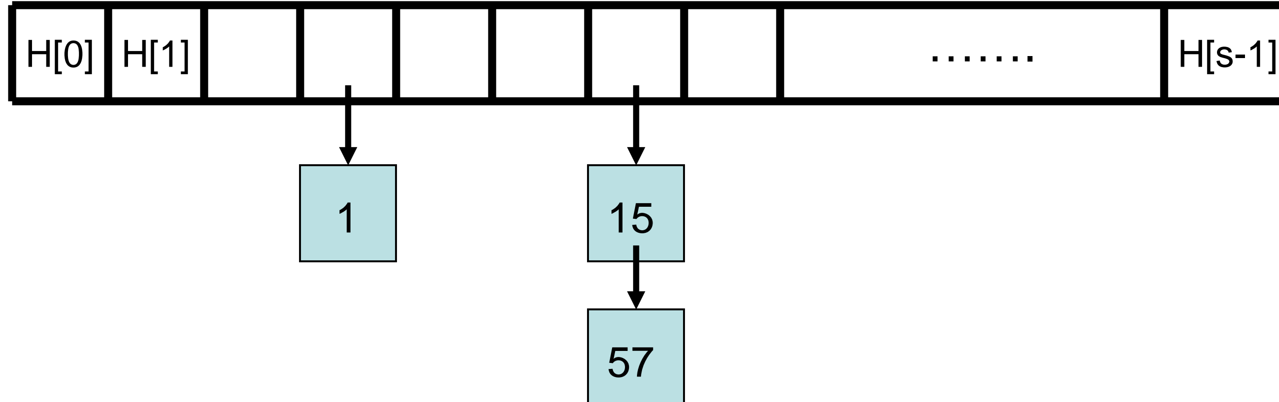

```
class listel {
   int zahl;
   listel *nachf; };

liste = new listel;
// dummy Element
liste->nachf=NULL;
```

```
Insert(x):

q = new listel;
q->zahl=x;
q->nachf =
     liste->nachf;
liste->nachf = q;
```

```
Delete(k):

if (liste->nachf==NULL)
   return NULL;
q=liste;
while (q->nachf!=NULL) {
   if (q->nachf->zahl==k)
      q->nachf=q->nachf->nachf;
   else q=q->nachf; }
```

Dictionary

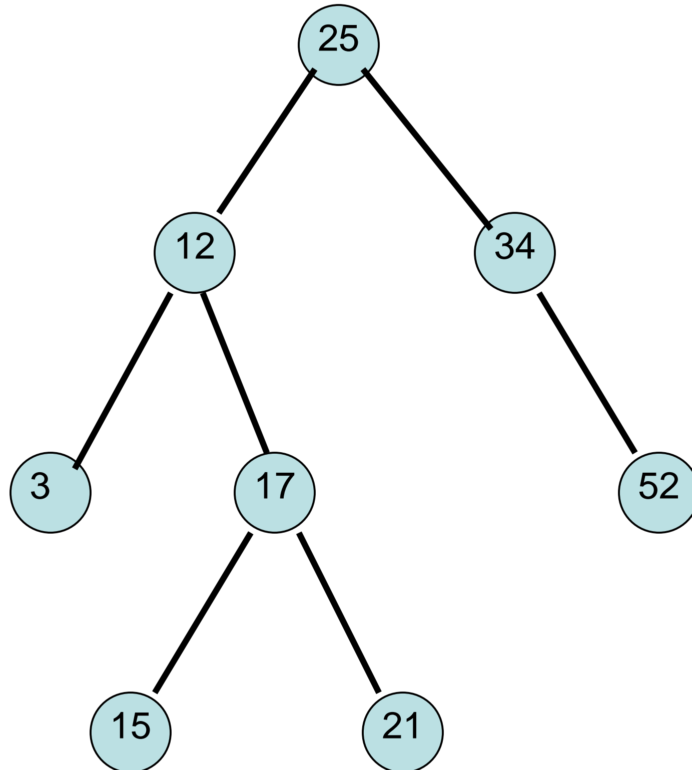
- Implementierung als Hashtabelle:



  - p: genügend große Primzahl (> Anzahl Elemente)
  - H: Tabelle mit Pointern auf ungeordnete Listen
  - h: Hashfunktion, $h(x) = ((a \cdot x+b) \bmod p) \bmod s$, p prim
  - Regel: Element x in Liste H[h(x)]

Dictionary

- Implementierung als Splay-Baum:



Splay-Baum: binärer Suchbaum

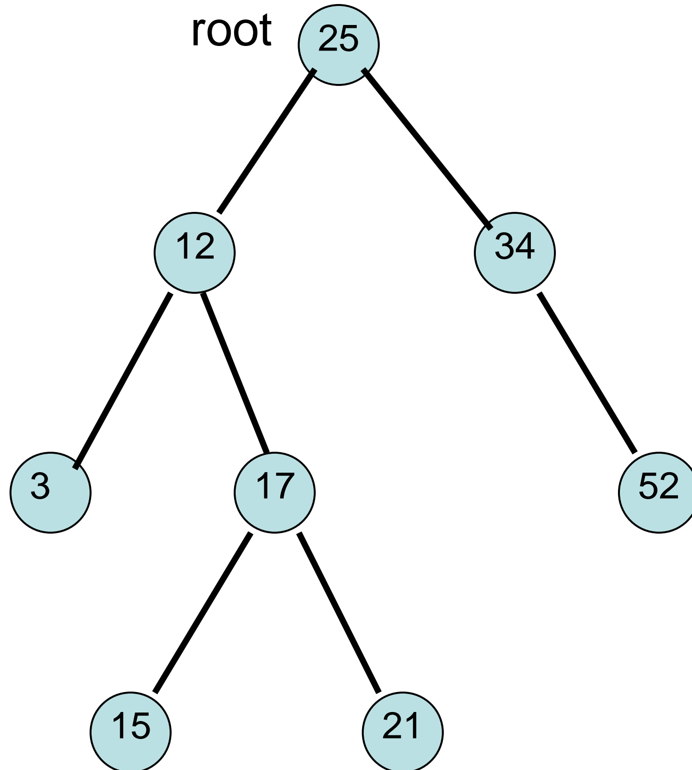
Binärer Suchbaum:

Für jeden Knoten v gilt:

- Anzahl Kinder <= 2
- Schlüssel im linken Teilbaum <= Schlüssel(v) <= Schlüssel im rechten Teilbaum

Dictionary

- Implementierung als Splay-Baum:



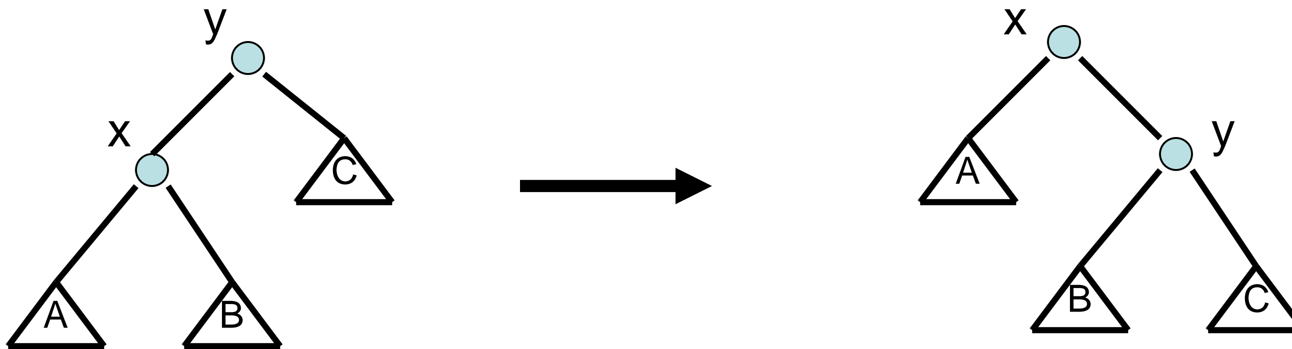

```
class node {
   int zahl;
   node *father;
   node *lson, *rson;
};
```

Search(k):

```
v := root;
while (v!=NULL && v->zahl!=k)
{  if (v->zahl>k) v=v->lson;
              else v=v->rson;
return v;
```

Splay-Baum

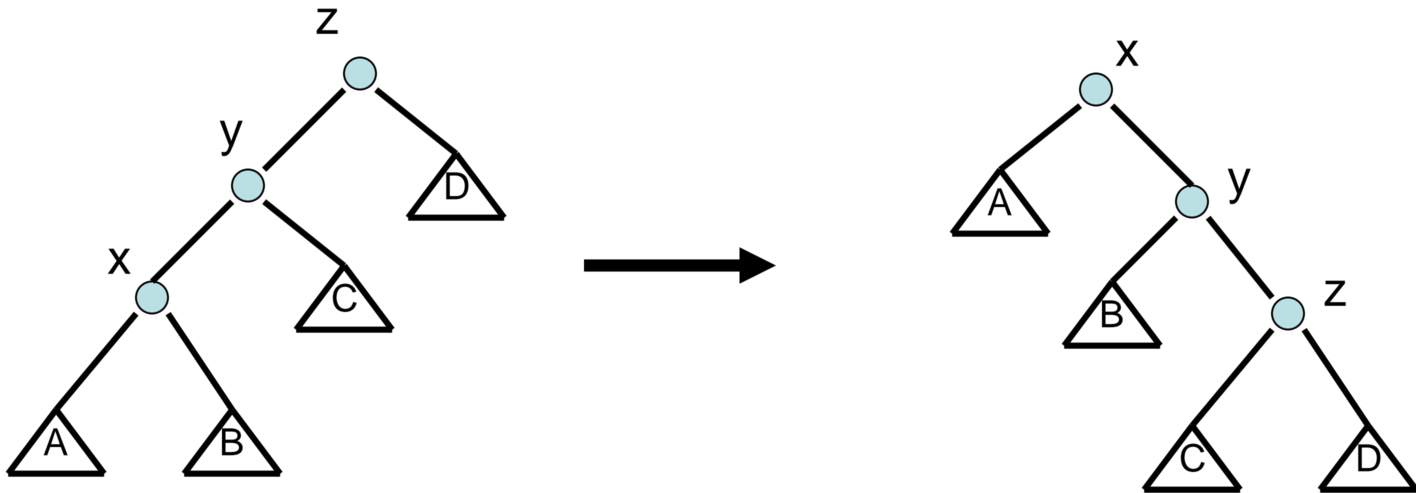
- Insert und Delete wie Search
- Balancierung des Suchbaums pro Search-Operation: momentaner Knoten ist x
  (1) x ist Kind der Wurzel



Fall x rechts von y analog

Splay-Baum

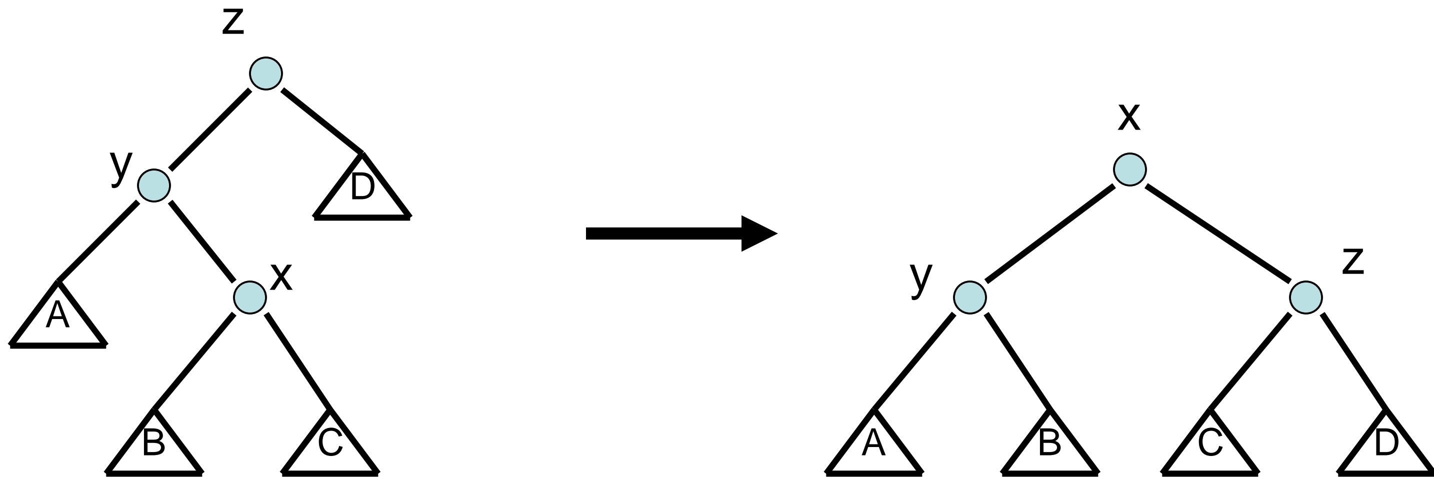
- (2) x hat Vater und Großvater rechts (bzw. links)



Fall x rechts von y und y rechts von z analog

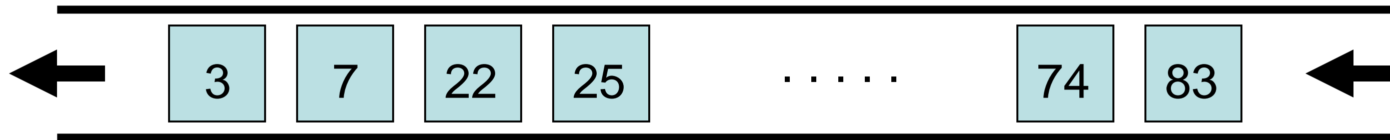
Splay-Baum

- (3) x hat Vater links und Großvater rechts



Fall x hat Vater rechts und Großvater links analog

Priority Queue

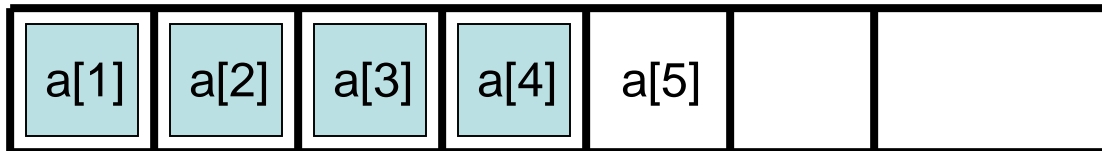


Operationen:

- Init(q): erzeugt eine leere Priority Queue q
- Insert(x,q): fügt x in die Priority Queue q ein
- Minimum(q): gibt kleinsten Schlüssel zurück
- ExtractMin(q): gibt kleinsten Schlüssel zurück und löscht ihn
- Empty(q): testet, ob Priority Queue q leer ist
- Merge(q, p): verschmelze q und p zu einer Priority Queue

Priority Queue

- Implementierung als Array:

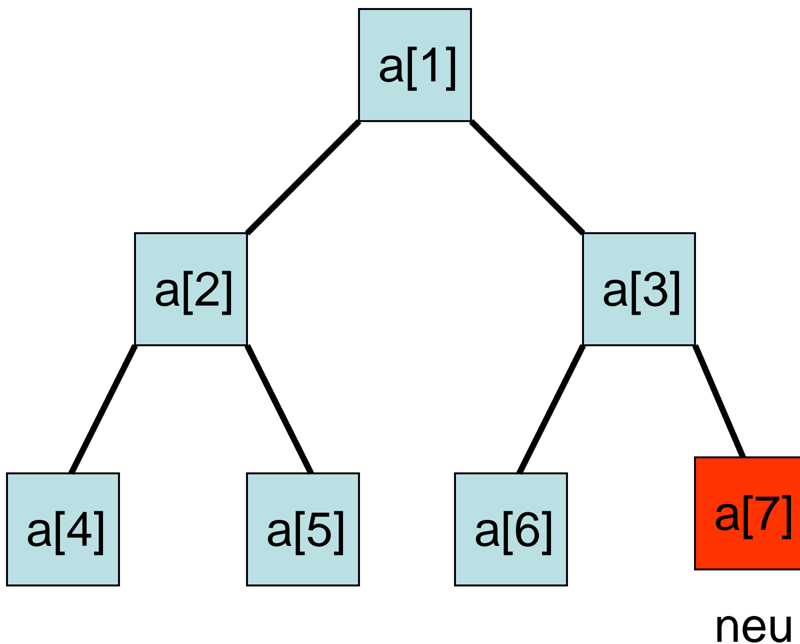


Regeln:

- bei n Einträgen sind Positionen a[1] bis a[n] besetzt (a[0]: n)
- für alle i gilt a[i] <= min{a[2i],a[2i+1]} (Heap-Eigenschaft)

Dadurch ist minimaler Schlüssel immer an der Wurzel.
Minimum(q) ist also einfach.

Priority Queue



- size: Anzahl Einträge
- min(x,y): gibt min{x,y} zurück
- argmin(i,j): gibt k 2 {i,j} mit a[k]=min{a[i],a[j]} zurück

Insert(x):

```
size=size+1;
a[size]=x;
i = size;
while (i!=0 && a[i/2]>a[i]) {
   t=a[i]; a[i]=a[i/2]; a[i/2]=I;
   i=i/2;
}
```

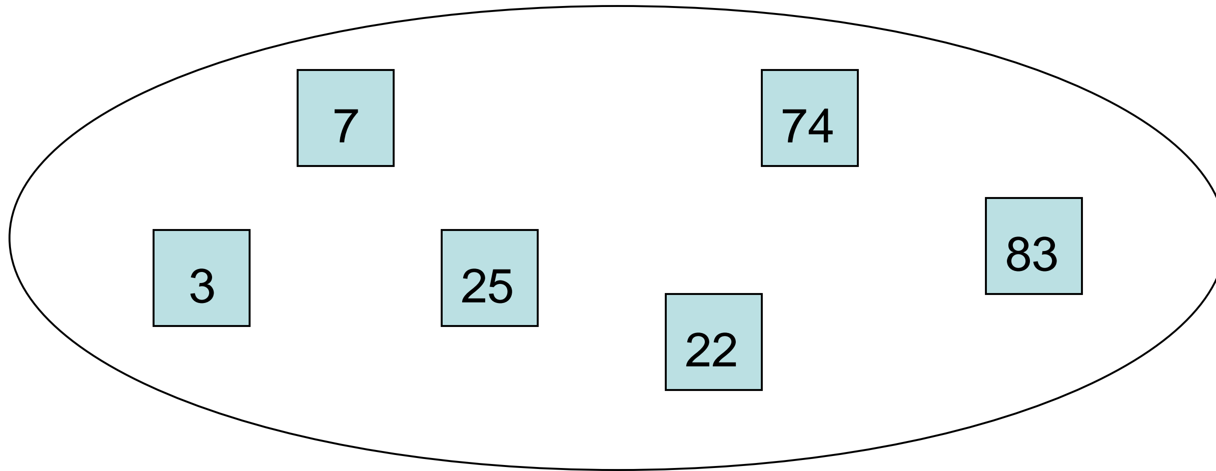
ExtractMin():

```
if (size==0) return -1;
x=a[1]; a[1]=a[size]; size--;
while (i<size) {
   if (size==2i && a[2i]<a[i])
      {a[2i]<->a[i]; i=2i;}
   if (size>2i && min(a[2i],a[2i+1])<a[i])
      { j = argmin(2i,2i+1);
        a[j]<->a[i]; i=j; }  }
return x;
```

Priority Queue

- Merge-Operation teuer bei binärem Heap
- Bessere DS: Binomial-Heap
  (wird in Vorlesung „Grundlegende Algorithmen“ vorgestellt)

Mengen

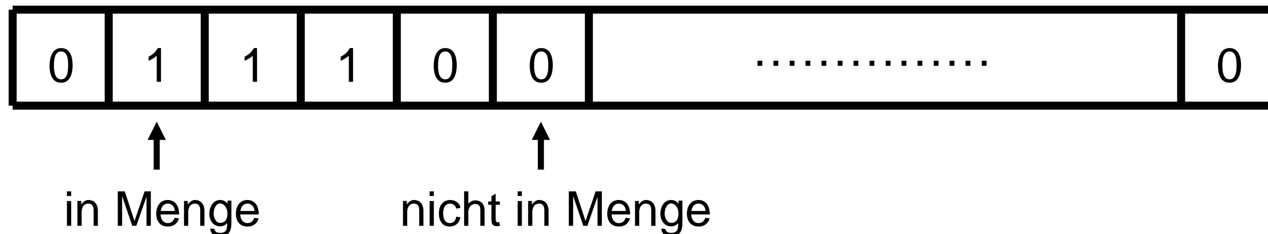


Operationen:

- Member(x,S): testet, ob x ein Mitglied von S ist
- Union(A,B): gibt die Vereinigung von A und B zurück
- Intersection(A,B): gibt den Schnitt von A und B zurück
- Insert/Delete(x,S): füge x in S ein / lösche x aus S

Mengen

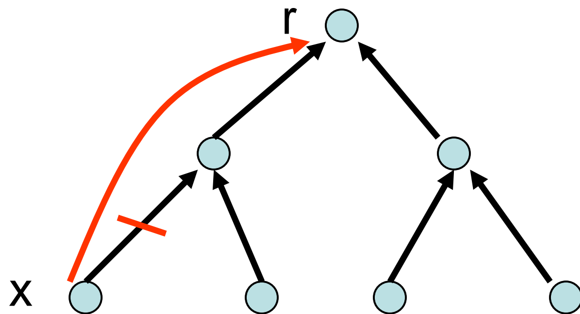
- Implementierung als Array: (vorzuziehen, falls Wertebereich klein)



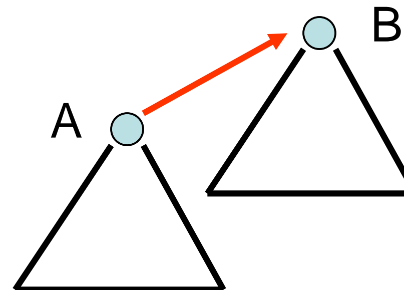
- Implementierung als Hashtabelle: ähnlich zu Dictionary
- Implementierung als Suchbaum: ähnlich zu Dictionary

Mengen

- Operationen:
  - Union(A,B): gibt A ∪ B zurück
  - Find(x): liefert Menge A von Element x
- Implementierung als Baum:
  Menge identifiziert duch Wurzel des Baums



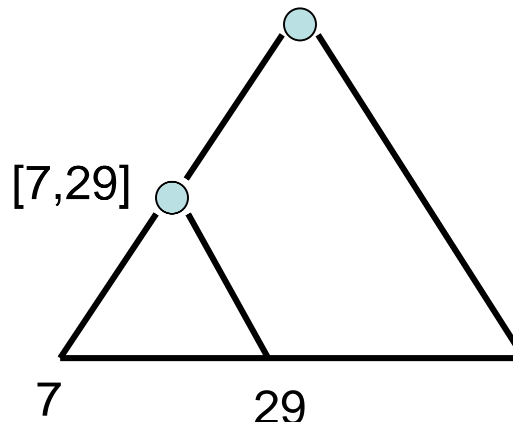
Find(x): biege Zeiger von x und Vorfahren auf r, gib r aus



Union(A,B): verbinde flacheren Baum (A) mit tieferem (B)

Mengen

- Operationen:
  - Intersection(A,B): gibt $A \cap B$ zurück
- Implementierung als Suchbaum:
  Füge Intervall [min(T(v)),max(T(v))] zu jedem Knoten v hinzu, wobei T(v) den Teilbaum mit Wurzel v angibt. Dann können über diese Intervalle effizient gemeinsame Elemente ermittelt werden.



Probleme

- 10038: Jolly Jumpers
- 484: The Department of Redundancy Department
- 443: Humble Numbers
- 496: Simply Subsets
- 10107: What is the Median?
- 1136: Help R2-D2!
- 10125: Sumsets

Hausaufgabe:

- 261: The Window Property