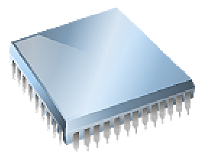
Berechenbarkeit

Gesucht: **Einfaches aber universelles Rechenmodell**

- **Einfach:** **erlaubt formale Analyse**
- **Universell:** **kann alle (durch beliebige andere realistische Rechenmodelle) berechenbaren Probleme lösen**

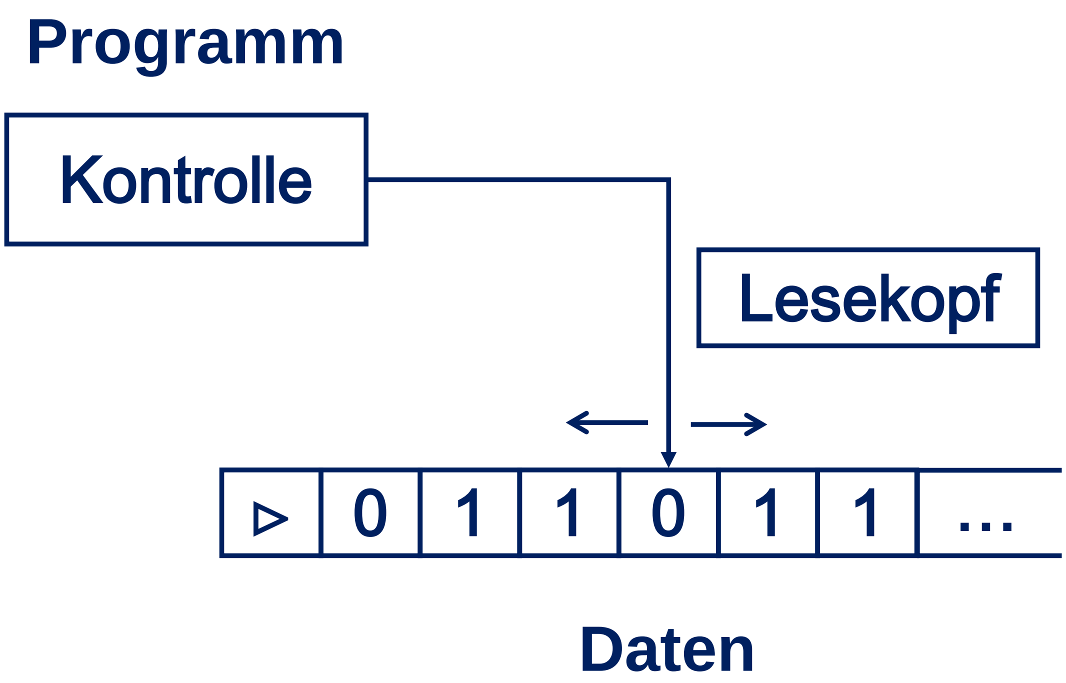
Von Neumann Modell



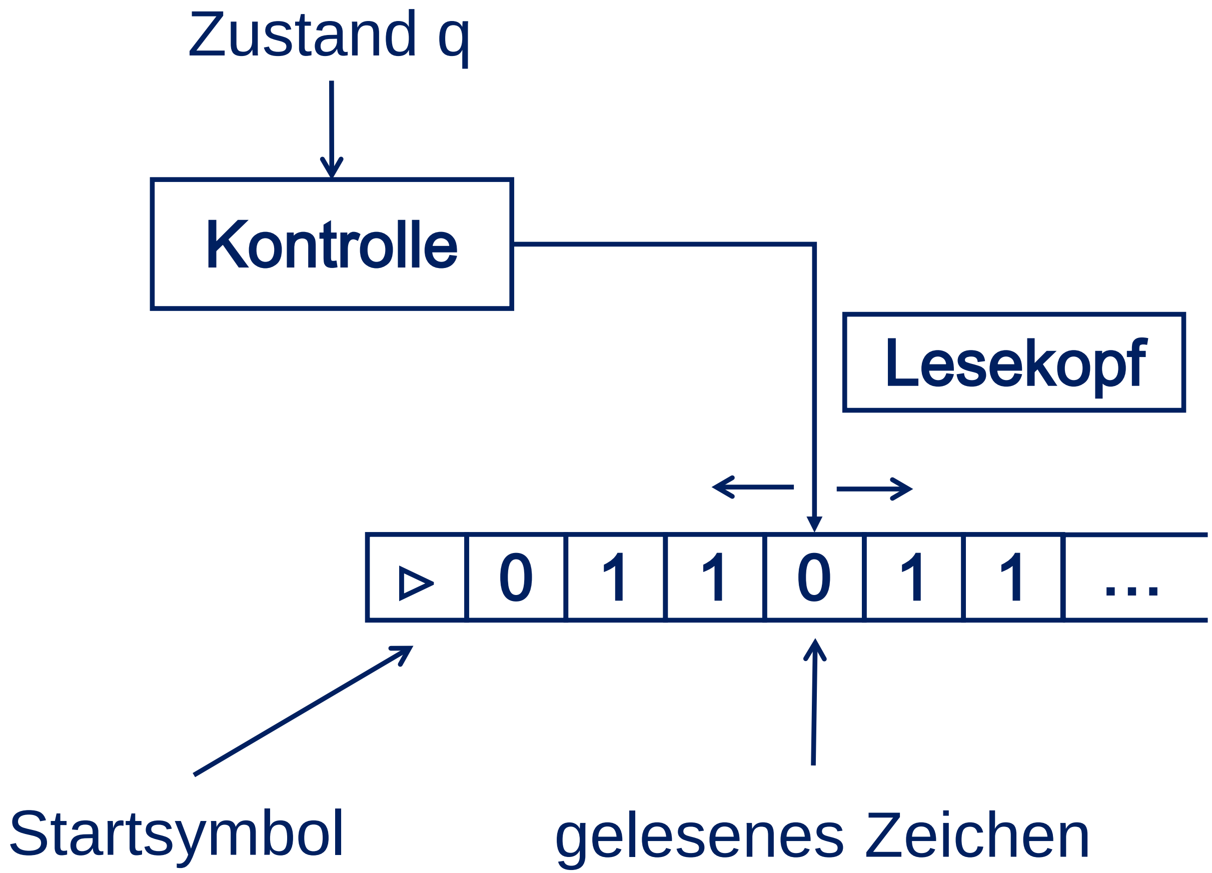
Rechnungen

Speicher (Programm und Daten)

Turingmaschine



Turingmaschine



Turingmaschine - Definition

Definition 2.1 Eine **deterministische 1-Band Turingmaschine (DTM)** ist ein 4-Tupel (Q,Σ,Γ,δ), wobei Q,Σ,Γ endliche Mengen sind. Weiter gilt

1. Q ist die **Zustandsmenge** mit $q_0, q_{accept}, q_{reject} \in Q$, $q_{accept} \neq q_{reject}$.

   Zustandsmenge fest!

2. Σ ist das **Eingabealphabet**, $\sqcup, \triangleright \notin \Sigma$.

3. Γ ist das **Bandalphabet**, $\Sigma \subset \Gamma$, $\sqcup, \triangleright \in \Gamma$.

4. $\delta: Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L,R\}$ ist die **Übergangs-funktion**.

   Programm

Turingmaschine – Notation, Einschränkungen

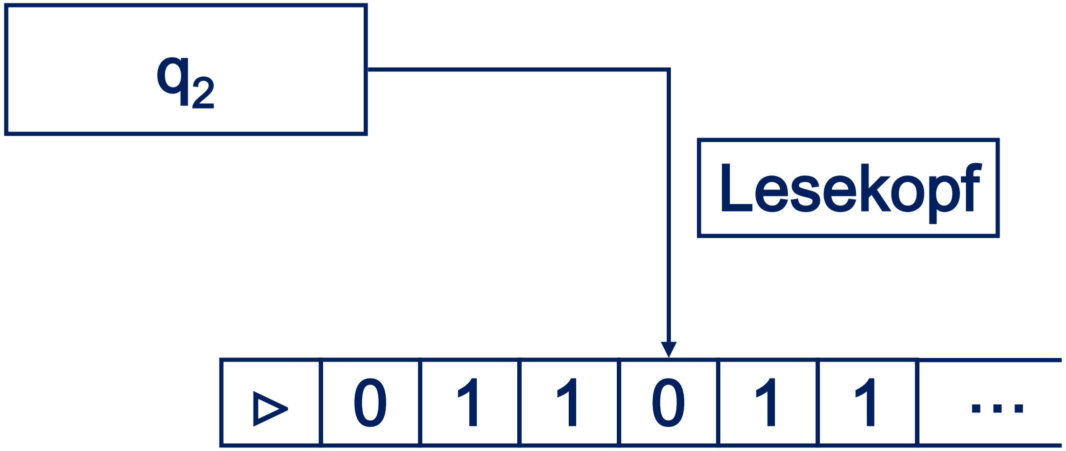
- q_0 = **Startzustand**, q_{accept} = **akzeptierender Zustand**, q_{reject} = **ablehnender Zustand**
- $\sqcup$= Blank, $\triangleright$= Startsymbol
- Für alle $q \in Q$, $a \in \Gamma, a \neq \triangleright$:

  $\delta(q,a) = (p,b,D)$ mit $b \neq \triangleright$, $D \in \{L,R\}$, $p \in Q$.
- Für alle $q \in Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}$:

  $\delta(q, \triangleright) = (p, \triangleright, R)$, $p \in Q$.
- **Rechenschritt** : = einmalige Anwendung von δ.

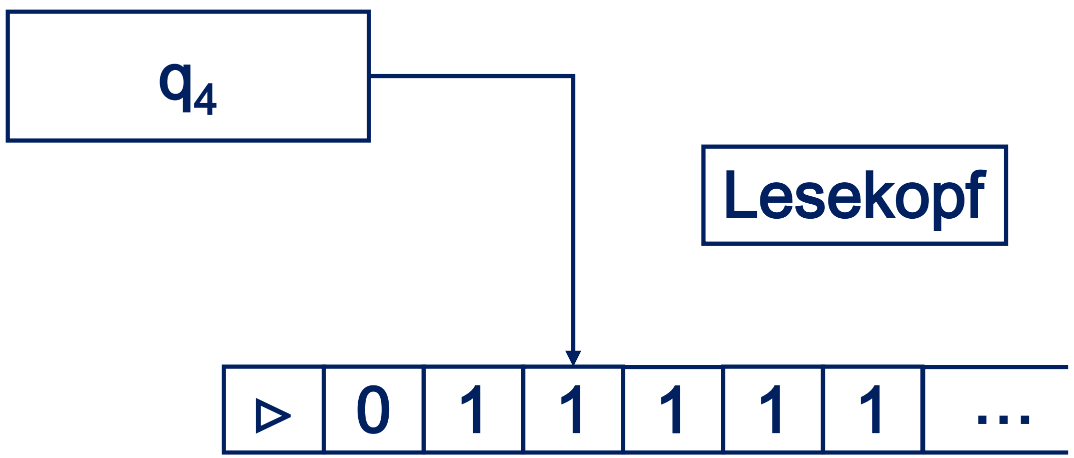
Turingmaschine – schematische Darstellung

Anwendung von $\delta(q_2,0) = (q_4,1,L)$



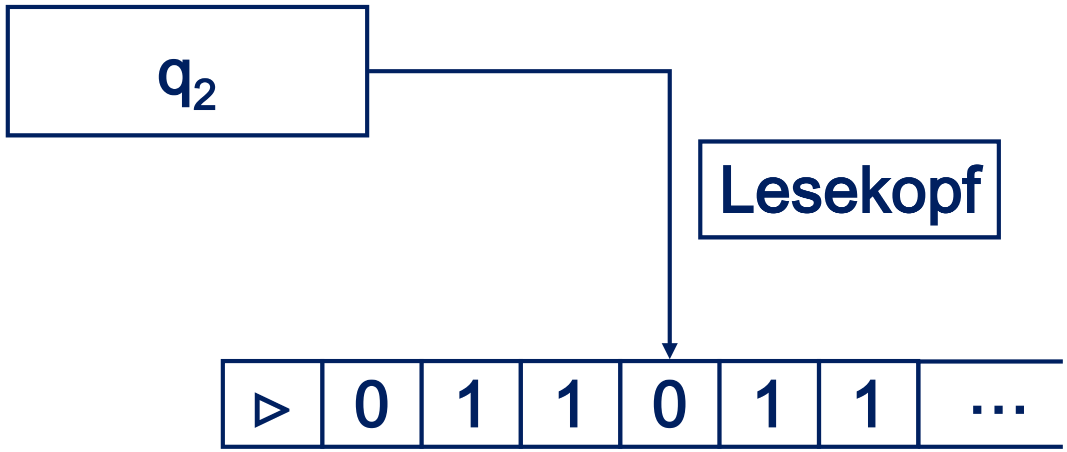
Turingmaschine – schematische Darstellung

Anwendung von $\delta(q_2,0) = (q_4,1,L)$



Turingmaschine – schematische Darstellung

Was passiert, wenn $\delta(q_2,0)$ nicht definiert ist?



Dann hält die TM (was immer für q_{accept},q_{reject} gilt!).

Turingmaschine – Beispiel

- $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $q_{accept} = q_2$, $q_{reject} = q_3$.
- $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a,\sqcup,\triangleright\}$
- δ ist definiert durch die folgende Tabelle

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	(q_1,a,R)	$(q_0,\triangleright,R)$	$(q_3,\sqcup,R)$
q_1	(q_1,a,R)	$(q_1,\triangleright,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$

Turingmaschine - Berechnung

DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. Berechnung bei Eingabe $w \in \Sigma^*$:

- **startet im Zustand q_0, mit Bandinhalt $\triangleright w$ und Lesekopf auf $\triangleright$,**
- **wendet in jedem Rechenschritt Übergangsfunktion δ an,**
- **bis Zustand q_{accept} oder q_{reject} erreicht wird bzw. im Allg. Situation (q,a) erreicht wird, für die $\delta(q,a)$ undefiniert ist (d.h. M hält),**
- **sonst Endlosrechnung.**

Turingmaschine – Beispiel

- $Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $q_{accept} = q_2$, $q_{reject} = q_3$.
- $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a,\sqcup,\triangleright\}$
- δ ist definiert durch die folgende Tabelle

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	(q_1,a,R)	$(q_0,\triangleright,R)$	$(q_3,\sqcup,R)$
q_1	(q_1,a,R)	$(q_1,\triangleright,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$

Turingmaschine - Konfigurationen

DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$, $\alpha,\beta \in \Gamma^*$, $q \in Q$.

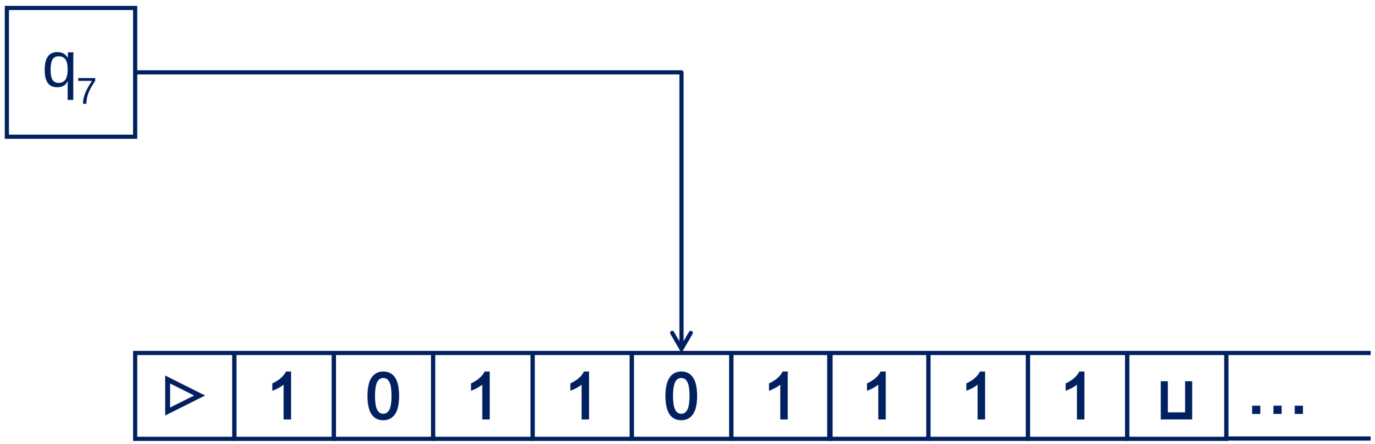
M ist in **Konfiguration** $K = \alpha q \beta$, wenn gilt:

- auf dem Band der DTM M steht $\alpha\beta$, gefolgt von Blanks,
- M befindet sich im Zustand q,
- der Lesekopf von M steht auf dem ersten Symbol von β.

β kann auch Blanks am Ende enthalten.

Turingmaschine - Konfigurationen

Konfiguration $\triangleright 1011 q_7 01111 \sqcup$



Nachfolgekonfigurationen

DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. Konfigurationen K_1,K_2 von M

- Konfiguration K_1 **führt zu** Konfiguration K_2 genau dann, wenn die DTM M durch einen Rechenschritt aus K_1 zu K_2 gelangt (wir schreiben auch $K_1 \rightarrow K_2$).

- Sagen auch, dass K_2 **Nachfolgekonfiguration** von K_1 ist.

Nachfolgekonfigurationen

DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. $a,b,c \in \Gamma$, $\alpha,\beta \in \Gamma^*$, $q,p \in Q$.

- **$K_1=\alpha a q_i b\beta$ führt zu $K_2=\alpha q_j a c\beta$, wenn**

$$\delta(q_i,b) = (q_j,c,L).$$

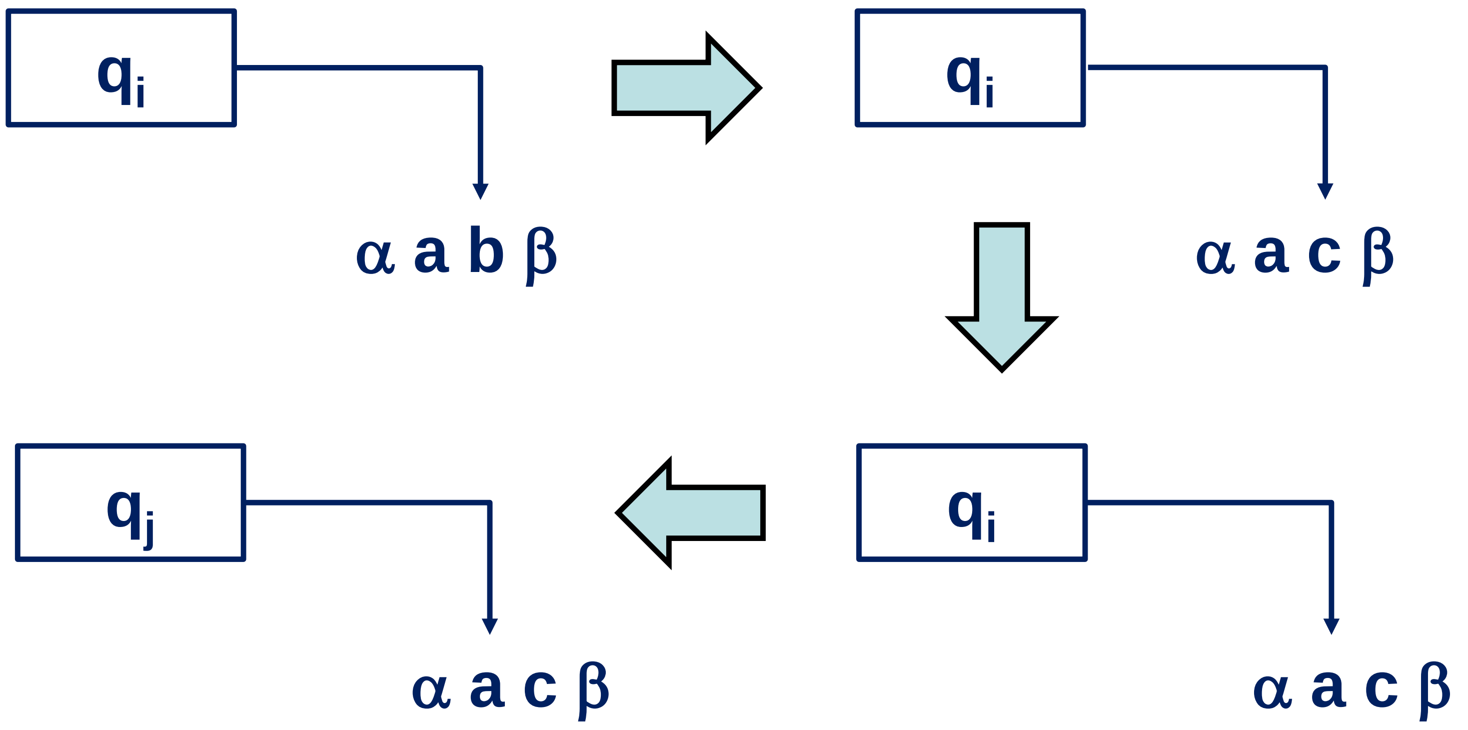
- **$K_1=\alpha a q_i b\beta$ führt zu $K_2=\alpha a c q_j\beta$, wenn**

$$\delta(q_i,b) = (q_j,c,R).$$

- **$K_1= q_i b\beta$ und $b = \triangleright$, so muss $\delta(q_i,b) = (q_j,\triangleright,R)$ gelten, also $K_2 = \triangleright q_j\beta$.**

Nachfolgekonfigurationen

Anwendung von $\delta(q_i,b)=(q_j,c,L)$ in kleinen Schritten:



Berechnungen und Konfigurationen

DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$, $w \in \Sigma^*$

- **Eingabe für M ist w, dann heißt $q_0\triangleright w$ Startkonfiguration.**
- **$K=\alpha q\beta$ heißt akzeptierende Konfiguration, falls $q = q_{accept}$.**
- **$K = \alpha q\beta$ heißt ablehnende Konfiguration, falls $q = q_{reject}$.**
- **Berechnung von M bei Eingabe w führt zu Folge $K_1,K_2,\ldots$ von Konfigurationen.**
- **Diese Folge kann endlich oder unendlich sein.**

Turingmaschine – Beispiel

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $s = q_0$, $q_{accept} = q_2$, $q_{reject} = q_3$.
- $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$
- δ ist definiert durch die folgende Tabelle

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, R)	$(q_0, \triangleright, R)$	$(q_3, \sqcup, R)$
q_1	(q_1, a, R)	$(q_1, \triangleright, R)$	$(q_2, \sqcup, R)$

Berechnungen und Konfigurationen

Definition 2.2 DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$, $w \in \Sigma^*$.

1. **M akzeptiert w**, falls es Konfigurationen $K_1,K_2,\ldots,K_l$ gibt, so dass
   a) K_1 ist Startkonfiguration von M bei Eingabe w.
   b) K_i führt zu K_{i+1} (d.h. $K_i \to K_{i+1}$), $i = 1,\ldots,l-1$.
   c) K_l ist akzeptierende Konfiguration.

2. **M lehnt w ab**, falls es Konfigurationen $K_1,K_2,\ldots,K_l$ gibt, so dass
   a) K_1 ist Startkonfiguration von M bei Eingabe w.
   b) K_i führt zu K_{i+1}, $i = 1,\ldots,l-1$.
   c) K_l ist ablehnende Konfiguration.

DTM M_1

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_2	$(q_8,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

Berechnung von M_1 bei Eingabe 0011

$q_0\triangleright 0011\sqcup$	$\triangleright q_3 0011\sqcup$	$\triangleright\sqcup q_3 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright q_0 0011\sqcup$	$q_3\triangleright 0011\sqcup$	$\triangleright q_3\sqcup 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright 0q_1 011\sqcup$	$\triangleright q_4 0011\sqcup$	$\triangleright\sqcup q_4 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright 00q_1 11\sqcup$	$\triangleright\sqcup q_5 011\sqcup$	$\triangleright\sqcup\sqcup q_5 1\sqcup\sqcup$
$\triangleright 001q_2 1\sqcup$	$\triangleright\sqcup 0q_5 11\sqcup$	$\triangleright\sqcup\sqcup 1q_5\sqcup\sqcup$
$\triangleright 0011q_2\sqcup$	$\triangleright\sqcup 01q_5 1\sqcup$	$\triangleright\sqcup\sqcup q_6 1\sqcup\sqcup$
$\triangleright 001q_3 1\sqcup$	$\triangleright\sqcup 011q_5\sqcup$	$\triangleright\sqcup q_3\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\triangleright 00q_3 11\sqcup$	$\triangleright\sqcup 01q_6 1\sqcup$	$\triangleright\sqcup\sqcup q_4\sqcup\sqcup\sqcup$
$\triangleright 0q_3 011\sqcup$	$\triangleright\sqcup 0q_3 1\sqcup\sqcup$	$\triangleright\sqcup\sqcup\sqcup q_7\sqcup\sqcup$

Akzeptieren und Entscheiden

Definition 2.3 DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. Die Menge der von M akzeptierten Worte aus Σ^* ist die **von M akzeptierte Sprache**. Geschrieben $L = L(M)$.

Definition 2.4 DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. DTM M **entscheidet** die von ihr akzeptierte Sprache L(M), wenn M alle Worte, die nicht in L(M) liegen, ablehnt.

Turingmaschine – Beispiel

- $Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $q_{accept} = q_2$, $q_{reject} = q_3$.
- $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a,\sqcup,\triangleright\}$
- δ ist definiert durch die folgende Tabelle

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	(q_1,a,R)	$(q_0,\triangleright,R)$	$(q_3,\sqcup,R)$
q_1	(q_1,a,R)	$(q_1,\triangleright,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$

$L(M) = \{a^n \mid n \geq 1\}$.

DTM M_1 für $L = \{0^n1^n | n \geq 1\}$

M_1 bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. **Teste, ob die Eingabe von der Form 0^i1^j ist, $i,j \in \mathbb{N}$ (sonst nicht akzeptieren).**

2. **Falls ja, gehe zum Beginn der 0/1-Folge zurück und streiche die erste 0 und die letzte 1.**

3. **Falls dabei noch eine 0 aber keine 1, oder eine 1 aber keine 0 mehr auf dem Band steht, lehne ab.**

4. **Falls dabei weder eine 0 noch eine 1 auf dem Band steht, akzeptiere (i=j). Sonst wiederhole 2.**

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

1. Teste, ob die Eingabe von der Form 0^i1^j ist, $i,j\in IN$ (sonst nicht akzeptieren).

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_2	$(q_8,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_3				
q_4				
q_5				
q_6				

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n | n \geq 1\}$

2. Falls ja, gehe zum Beginn der 0/1-Folge zurück und streiche die erste 0 und die letzte 1.

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0				
q_1				
q_2				
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

3. Falls dabei noch eine 0 aber keine 1, oder eine 1 aber keine 0 mehr auf dem Band steht, lehne ab.

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0				
q_1				
q_2				
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

4. **Falls dabei weder eine 0 noch eine 1 auf dem Band steht, akzeptiere (i=j). Sonst wiederhole 2.**

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0				
q_1				
q_2				
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

DTM M_2 für $L = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

M_2 bei Eingabe $w \in 0^*$:

1. Durchlaufe die Eingabe von links nach rechts und streiche dabei jede zweite 0.

2. Wird im ersten Schritt festgestellt, dass nur noch eine 0 auf dem Band steht, akzeptiere.

3. Wird im ersten Schritt festgestellt, dass mehr als eine 0, aber eine ungerade Anzahl von 0 auf dem Band steht, lehne ab.

4. Gehe zum Beginn des Bandes und starte ersten Schritt.

DTM M_2 für $L=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

Start: bereite Schritt 1. vor

δ	**0**	**x**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1				
q_2				
q_3				
q_4				

$$q_5 = q_{accept}, q_6 = q_{reject}$$

DTM M_2 für $L=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

1. Durchlaufe die Eingabe von links nach rechts und streiche dabei jede zweite 0.

δ	0	x	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	(q_2,x,R)	(q_1,x,R)	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_2	$(q_3,0,R)$	(q_2,x,R)	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_3				
q_4				

$q_5 = q_{accept}, q_6 = q_{reject}$

DTM M_2 für $L=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

2. Wird im ersten Schritt festgestellt, dass nur noch eine 0 auf dem Band steht, akzeptiere.

δ	**0**	**x**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	(q_2,x,R)	(q_1,x,R)	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_2	$(q_3,0,R)$	(q_2,x,R)	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_3				
q_4				

$q_5 = q_{accept}, q_6 = q_{reject}$

DTM M_2 für $L=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

3. Steht mehr als eine 0, aber eine ungerade Anzahl von 0 auf dem Band, lehne ab.

δ	0	x	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	(q_2,x,R)	(q_1,x,R)	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_2	$(q_3,0,R)$	(q_2,x,R)	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_3	(q_2,x,R)	(q_3,x,R)	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_4				

$q_5 = q_{accept}, q_6 = q_{reject}$

DTM M_2 für $L=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

4. Gehe zum Beginn des Bandes und starte ersten Schritt.

δ	**0**	**x**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	(q_2,x,R)	(q_1,x,R)	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_2	$(q_3,0,R)$	(q_2,x,R)	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_3	(q_2,x,R)	(q_3,x,R)	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_6,\triangleright,R)$
q_4	$(q_4,0,L)$	(q_4,x,L)	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$

$q_5 = q_{accept}, q_6 = q_{reject}$

Berechnung von M_2 bei Eingabe 0000

$q_0 \triangleright 0000 \sqcup$	$\triangleright q_4 0x0x \sqcup$	$\triangleright 0 q_4 xxx \sqcup$
$\triangleright q_0 0000 \sqcup$	$q_4 \triangleright 0x0x \sqcup$	$\triangleright q_4 0xxx \sqcup$
$\triangleright 0 q_1 000 \sqcup$	$\triangleright q_0 0x0x \sqcup$	$q_4 \triangleright 0xxx \sqcup$
$\triangleright 0x q_2 00 \sqcup$	$\triangleright 0 q_1 x0x \sqcup$	$\triangleright q_0 0xxx \sqcup$
$\triangleright 0x0 q_3 0 \sqcup$	$\triangleright 0x q_1 0x \sqcup$	$\triangleright 0 q_1 xxx \sqcup$
$\triangleright 0x0x q_2 \sqcup$	$\triangleright 0xx q_2 x \sqcup$	$\triangleright 0x q_1 xx \sqcup$
$\triangleright 0x0 q_4 x \sqcup$	$\triangleright 0xxx q_2 \sqcup$	$\triangleright 0xx q_1 x \sqcup$
$\triangleright 0x q_4 0x \sqcup$	$\triangleright 0xx q_4 x \sqcup$	$\triangleright 0xxx q_1 \sqcup$
$\triangleright 0 q_4 x0x \sqcup$	$\triangleright 0x q_4 xx \sqcup$	$\triangleright 0xx q_5 x \sqcup$

DTM M_3 für Palindrome über {0,1}

M_3 bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Lese das erste Zeichen in w, merke Dir dieses Zeichen und ersetze es durch einen $\sqcup$. w leer: akzeptiere
2. Gehe zum letzten Zeichen $\neq \sqcup$. Passt dieses nicht zum gemerkten Zeichen, lehne ab. Sonst ersetze es mit $\sqcup$.
3. Gibt es kein Zeichen $\neq \sqcup$ mehr, akzeptiere (|w| ist ungerade).
4. Gehe zum Beginn der Eingabe und starte den ersten Schritt.

DTM M_3 für Palindrome über {0,1}

1. Lese das erste Zeichen in w, merke Dir dieses Zeichen und ersetze es durch einen $\sqcup$. w leer: akzeptiere

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,\sqcup,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1				
q_2				
q_3				
q_4				
q_5				

$$q_6 = q_{accept}, q_7 = q_{reject}$$

DTM M_3 für Palindrome über {0,1}

2. Gehe zum letzten Zeichen $\neq \sqcup$. Passt dieses nicht zum gemerkten Zeichen, lehne ab. Sonst ersetze es mit $\sqcup$.

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,\sqcup,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_1,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_2	$(q_2,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_3	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_7,1,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_4	$(q_7,0,L)$	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_5				

$$q_6 = q_{accept}, q_7 = q_{reject}$$

DTM M_3 für Palindrome über {0,1}

3. Gibt es kein Zeichen $\neq \sqcup$ mehr, akzeptiere (|w| ist ungerade).

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,\sqcup,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_1,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_2	$(q_2,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_3	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_7,1,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_4	$(q_7,0,L)$	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_5				

$$q_6 = q_{accept}, q_7 = q_{reject}$$

DTM M_3 für Palindrome über {0,1}

4. Gehe zum Beginn der Eingabe und starte den ersten Schritt.

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,\sqcup,R)$	$(q_2,\sqcup,R)$	$(q_6,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_1,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_2	$(q_2,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_4,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_3	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_7,1,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_4	$(q_7,0,L)$	$(q_5,\sqcup,L)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_7,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,L)$	$(q_5,1,L)$	$(q_0,\sqcup,R)$	$(q_7,\triangleright,R)$

$$q_6 = q_{accept}, q_7 = q_{reject}$$

Rekursiv aufzählbare und rekursive Sprachen

Definition 2.5 Sei Σ eine endliche Menge und $L \subseteq \Sigma^*$.

1. L heißt **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine DTM M mit Eingabealphabet Σ gibt, die L akzeptiert.

2. L heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine DTM M mit Eingabealphabet Σ gibt, die L entscheidet.

DTM M_1 für $L=\{0^n1^n|n\geq 1\}$

δ	**0**	**1**	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_2	$(q_8,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

M_1 entscheidet L.

Berechnung von M_1 für Eingabe in L

$q_0 \triangleright 0011\sqcup$	$\triangleright q_3 0011\sqcup$	$\triangleright \sqcup q_3 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright q_0 0011\sqcup$	$q_3 \triangleright 0011\sqcup$	$\triangleright q_3 \sqcup 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright 0 q_1 011\sqcup$	$\triangleright q_4 0011\sqcup$	$\triangleright \sqcup q_4 01\sqcup\sqcup$
$\triangleright 00 q_1 11\sqcup$	$\triangleright \sqcup q_5 011\sqcup$	$\triangleright \sqcup\sqcup q_5 1\sqcup\sqcup$
$\triangleright 001 q_2 1\sqcup$	$\triangleright \sqcup 0 q_5 11\sqcup$	$\triangleright \sqcup\sqcup 1 q_5 \sqcup\sqcup$
$\triangleright 0011 q_2 \sqcup$	$\triangleright \sqcup 01 q_5 1\sqcup$	$\triangleright \sqcup\sqcup q_6 1\sqcup\sqcup$
$\triangleright 001 q_3 1\sqcup$	$\triangleright \sqcup 011 q_5 \sqcup$	$\triangleright \sqcup q_3 \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\triangleright 00 q_3 11\sqcup$	$\triangleright \sqcup 01 q_6 1\sqcup$	$\triangleright \sqcup\sqcup q_4 \sqcup\sqcup\sqcup$
$\triangleright 0 q_3 011\sqcup$	$\triangleright \sqcup 0 q_3 1\sqcup\sqcup$	$\triangleright \sqcup\sqcup\sqcup q_7 \sqcup\sqcup$

Berechnung von M_1 für Eingabe nicht in L

- $w=\varepsilon$:
  $q_0 \triangleright \sqcup \to \triangleright q_0 \sqcup \to \triangleright \sqcup q_8$

- $w=0^+$:
  $q_0 \triangleright 0^+ \sqcup \to \triangleright q_0 0^+ \sqcup \to \triangleright 0 q_1 0^* \sqcup \to \ldots \to \triangleright 0^+ q_1 \sqcup \to \triangleright 0^+ \sqcup q_8$

- $w=1\{0,1\}^*$:
  $q_0 \triangleright 1\{0,1\}^* \sqcup \to \triangleright q_0 1\{0,1\}^* \sqcup \to \triangleright 1 q_8 \{0,1\}^* \sqcup$

- $w=0^+1^+0\{0,1\}^*$:
  $q_0 \triangleright 0^+1^+0\{0,1\}^* \sqcup \to \triangleright q_0 0^+1^+0\{0,1\}^* \sqcup \to \triangleright 0 q_1 0^* 1^+0\{0,1\}^* \sqcup$
  $\to \ldots \to \triangleright 0^+ q_1 1^+0\{0,1\}^* \sqcup \to \triangleright 0^+1 q_2 1^* 0\{0,1\}^*$
  $\to \ldots \to \triangleright 0^+1^+ q_2 0\{0,1\}^* \to \triangleright 0^+1^+0 q_8 \{0,1\}^*$

Berechnung von M_1 für Eingabe nicht in L

- $w=0^n1^m$, $n,m\geq 1$, $n>m$:
  $q_0\triangleright 0^n1^m\sqcup \to \triangleright q_0 0^n1^m\sqcup \to \triangleright 0q_1 0^{n-1}1^m\sqcup$
  $\to \dots \to \triangleright 0^n q_1 1^m\sqcup \to \triangleright 0^n 1 q_2 1^{m-1}\sqcup$
  $\to \dots \to \triangleright 0^n 1^m q_2\sqcup \to \triangleright 0^n 1^{m-1} q_3 1\sqcup$
  $\to \dots \to q_3\triangleright 0^n1^m\sqcup \to \triangleright q_4 0^n 1^m$
  $\to \dots \to \triangleright \sqcup^m q_4 0^{n-m}\sqcup \to \dots \to \triangleright \sqcup^{m+1} 0^{n-m-1} q_5\sqcup$
  $\to \triangleright \sqcup^{m+1} 0^{n-m-2} q_6 0\sqcup \to \triangleright \sqcup^{m+1} 0^{n-m-1} q_8\sqcup$
- $w=0^n1^m$, $n,m\geq 1$, $n<m$: ähnliche Rechnung führt auch zu q_8.

D.h. M_1 lehnt alle Worte nicht in L ab. (Einfach nur halten reicht nicht, siehe Def. der Entscheidbarkeit!)

DTM M'_1 für $L=\{0^n1^n | n \geq 1\}$

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1,0,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_0,\triangleright,R)$
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_1,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_2	$(q_8,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	$(q_4,\sqcup,R)$	$(q_4,\triangleright,R)$
q_4	$(q_5,\sqcup,R)$	$(q_8,1,R)$	$(q_7,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_5	$(q_5,0,R)$	$(q_5,1,R)$	$(q_6,\sqcup,L)$	$(q_8,\triangleright,R)$
q_6	$(q_8,0,R)$	$(q_3,\sqcup,L)$	$(q_8,\sqcup,R)$	$(q_8,\triangleright,R)$

$q_7=q_{accept}$, $q_8=q_{reject}$

M'_1 akzeptiert L.

Berechnung von M'_1 für Eingabe nicht in L

- $w=\varepsilon$:
  $q_0\triangleright\sqcup \rightarrow \triangleright q_0\sqcup \rightarrow \triangleright\sqcup q_8$

- $w=0^+$:
  $q_0\triangleright 0^+\sqcup \rightarrow \triangleright q_0 0^+\sqcup \rightarrow \triangleright 0 q_1 0^*\sqcup \rightarrow \dots \rightarrow \triangleright 0^+ q_1\sqcup$
  $\rightarrow \triangleright 0^+\sqcup q_1\sqcup \rightarrow \triangleright 0^+\sqcup\sqcup q_1\sqcup \rightarrow \dots$ Endlosrechnung!

- $w=1\{0,1\}^*$:
  $q_0\triangleright 1\{0,1\}^*\sqcup \rightarrow \triangleright q_0 1\{0,1\}^*\sqcup \rightarrow \triangleright 1 q_8\{0,1\}^*\sqcup$

- $w=0^+1^+0\{0,1\}^*$:
  $q_0\triangleright 0^+1^+0\{0,1\}^*\sqcup \rightarrow \triangleright q_0 0^+1^+0\{0,1\}^*\sqcup \rightarrow \triangleright 0 q_1 0^*1^+0\{0,1\}^*\sqcup$
  $\rightarrow \dots \rightarrow \triangleright 0^+ q_1 1^+0\{0,1\}^*\sqcup \rightarrow \triangleright 0^+1 q_2 1^*0\{0,1\}^*$
  $\rightarrow \dots \rightarrow \triangleright 0^+1^+ q_2 0\{0,1\}^* \rightarrow \triangleright 0^+1^+0 q_8\{0,1\}^*$

Berechnung von Funktionen

Definition 2.6 **DTM $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$. Die DTM M berechnet die Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \setminus \{\triangleright,\sqcup\}$, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Berechnung von M mit Eingabe w in einer akzeptierenden Konfiguration hält und dabei der Bandinhalt f(w) ist. Hierbei werden $\triangleright$ und alle $\sqcup$ ignoriert.**

Wir werden uns hauptsächlich mit Entscheidbarkeit beschäftigen.

Zusammenfassung

- Turingmaschinen als Berechnungsmodell
- Berechnung von DTMs – Rechenschritte, Konfigurationen, Nachfolgekonfigurationen
- Akzeptieren/Ablehnen von Worten/Eingaben
- Akzeptieren/Entscheiden von Sprachen
- Unterschied zwischen Akzeptieren und Entscheiden