Reduktionen

Formalisierung von

- **Sprache A ist nicht schwerer als Sprache B.**

Idee:

- **Algorithmus/DTM für B kann genutzt werden, um A zu entscheiden/akzeptieren.**

Zwei einfache Sprachen

$P := \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom.} \}$

$XOR := \{ (a,b,c) \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mid a,b,c \text{ haben die gleiche Länge und } a \oplus b = c. \}$

$$f: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$$

$$w \rightarrow (w, w^R, 0^{|w|})$$

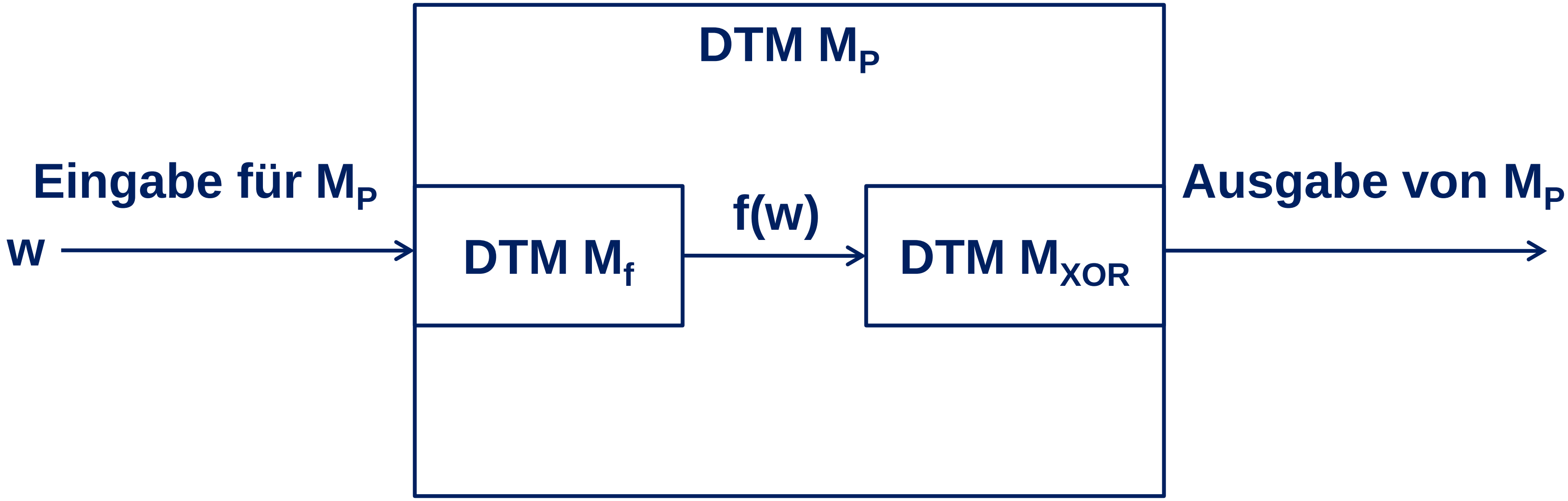
Von XOR und f zu P

M_P bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Berechne mit M_f das Tripel $f(w) = (w, w^R, 0^{|w|})$.
2. Simuliere M_{XOR} mit Eingabe $f(w)$.
3. Falls M_{XOR} die Eingabe $f(w)$ akzeptiert, akzeptiere w.
4. Falls M_{XOR} die Eingabe $f(w)$ ablehnt, lehne w ab.

M_{XOR} entscheidet XOR, M_f berechnet f.

Graphische Darstellung von M_P



Berechnung von Funktionen

Zur Erinnerung:

Definition 2.6 DTM M = (Q,Σ,Γ,δ). Die DTM M **berechnet** die Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \setminus \{\rhd,\sqcup\}$, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Berechnung von M mit Eingabe w in einer akzeptierenden Konfiguration hält und dabei der Bandinhalt f(w) ist. Hierbei werden $\rhd$ und alle $\sqcup$ ignoriert.

Reduktionen - Definition

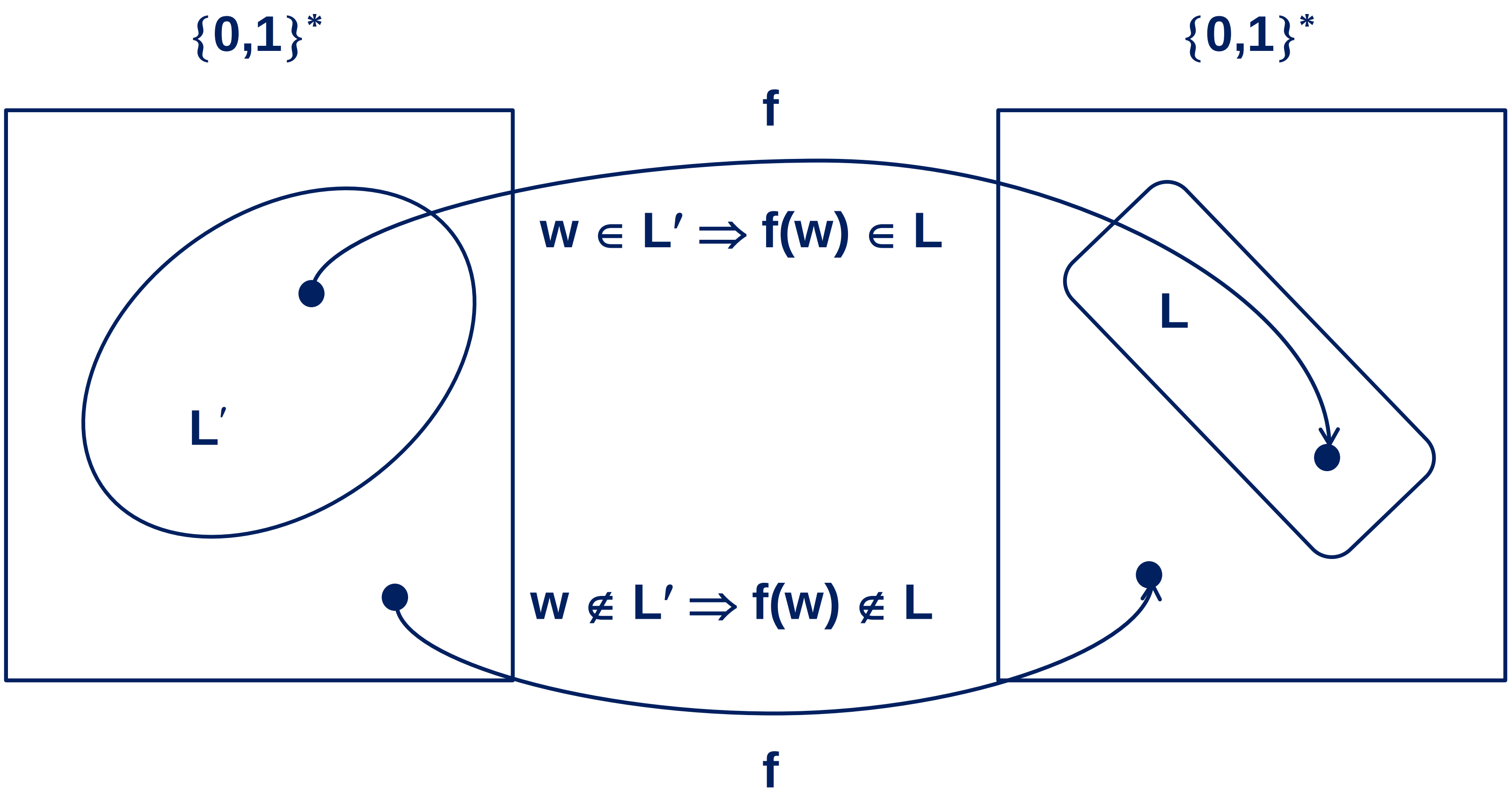
Definition 2.34 $L' \subseteq \{0,1\}^*$ heißt **reduzierbar** auf $L \subseteq \{0,1\}^*$, falls es eine Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ gibt mit

1. Für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt:
$$w \in L' \Leftrightarrow f(w) \in L.$$

2. f ist **berechenbar**, d.h., es gibt eine DTM M_f, die die Funktion f berechnet.

f heißt **Reduktion** von L' auf L, geschrieben $L' \leq L$.

Reductionen – Graphische Darstellung



Reduktionen, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit

Lemma 2.35 $L', L \in \{0,1\}^*$ seien Sprachen mit $L' \leq L$.
Dann gilt:

1. Ist L entscheidbar, so ist auch L´ entscheidbar.
2. Ist L rekursiv aufzählbar, so ist auch L´ rekursiv aufzählbar.

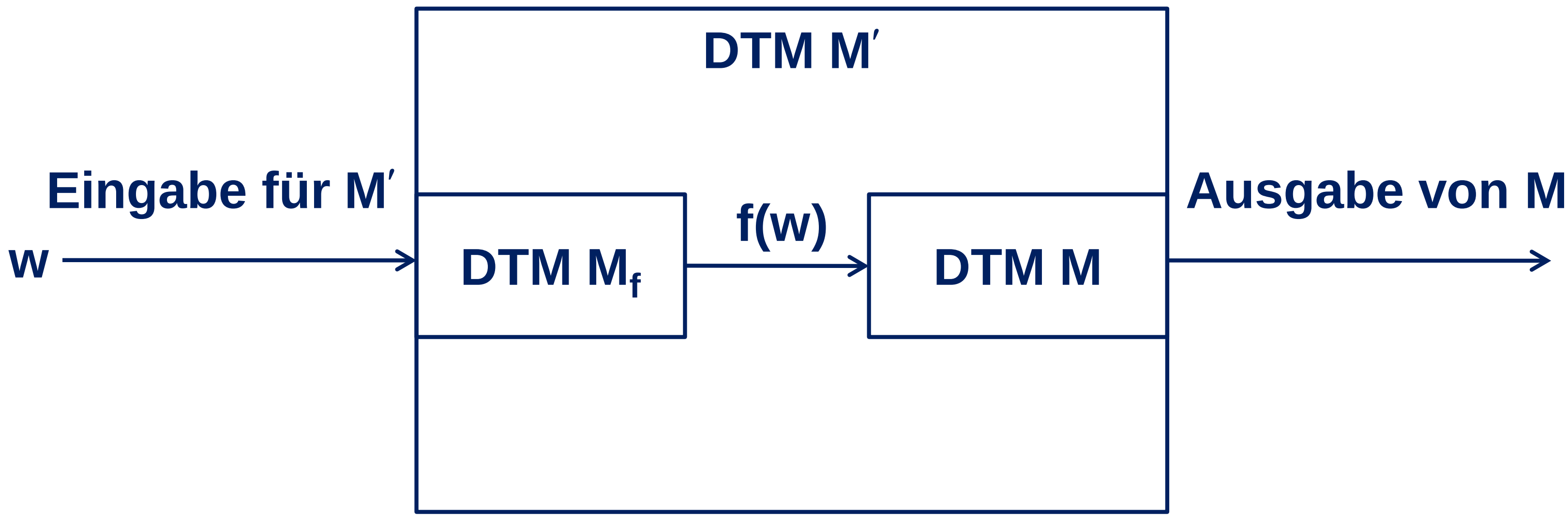
Von L zu L′

Angenommen, $L' \leq L$ mittels f. Sei M DTM für L.

M′ bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. **Berechne mit M_f die Folge f(w).**
2. **Simuliere M mit Eingabe f(w).**
3. **Falls M die Eingabe f(w) akzeptiert, akzeptiere w.**
4. **Falls M die Eingabe f(w) ablehnt, lehne w ab.**

Graphische Darstellung von M′



Akzeptanz- und Halteproblem

$H := \{\langle M\rangle x \mid$ M ist DTM, die gestartet mit Eingabe x hält.$\}$

$A := \{\langle M\rangle x \mid$ M ist DTM, die die Eingabe x akzeptiert.$\}$

Wir wollen zeigen: $H \leq A$.

Reduktion von H auf A

$\overline{M}$ bei Eingabe $x \in \{0,1\}^*$:

1. **Simuliere M mit Eingabe x.**
2. **Falls M die Eingabe x akzeptiert, akzeptiere x.**
3. **Falls M die Eingabe x ablehnt, akzeptiere x.**

$$f(w) := \begin{cases} w & \text{falls } w \text{ nicht von der Form } \langle M\rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ ist.} \\ \langle \overline{M}\rangle x & \text{falls } w = \langle M\rangle x \text{ ist, wobei } \overline{M} \text{ wie oben definiert ist.} \end{cases}$$

Berechnung von f

M_f bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Überprüfe, ob $w = \langle M \rangle x$ für eine DTM M und $x \in \{0,1\}^*$.
2. Falls dies nicht der Fall ist, gib w aus.
3. Sonst konstruiere aus M die DTM $\overline{M}$.
4. Berechne $\langle \overline{M} \rangle$ und gib $\langle \overline{M} \rangle x$ aus.

Lemma 2.36 Das Halteproblem kann auf das Akzeptanzproblem reduziert werden, also $H \leq A$.

Die Sprache Useful

Useful:={ $(\langle M\rangle,q)$ | M ist eine DTM mit Zustand q, und es gibt eine Eingabe w, so dass M gestartet mit w in den Zustand q gerät.}

Wir wollen zeigen: $A \leq$ Useful.

Reduktion von A auf Useful

M_x bei Eingabe $z \in \{0,1\}^*$:

1. Lösche z vom Band und schreibe x auf das Band.
2. Simuliere M mit Eingabe x.

$$f(w) := \begin{cases} (\langle M^{reject} \rangle, q_{accept}) & \text{falls } w \text{ nicht von der Form } \langle M \rangle x \text{ ist.} \\ (\langle M_x \rangle, q_{accept}) & \text{falls } w = \langle M \rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ und ein } x \in \{0,1\}^*. \end{cases}$$

Reduktion von A auf Useful

Lemma 2.37 **Das Akzeptanzproblem kann auf die Sprache Useful reduziert werden, also A $\leq$ Useful.**

Reductionen, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit

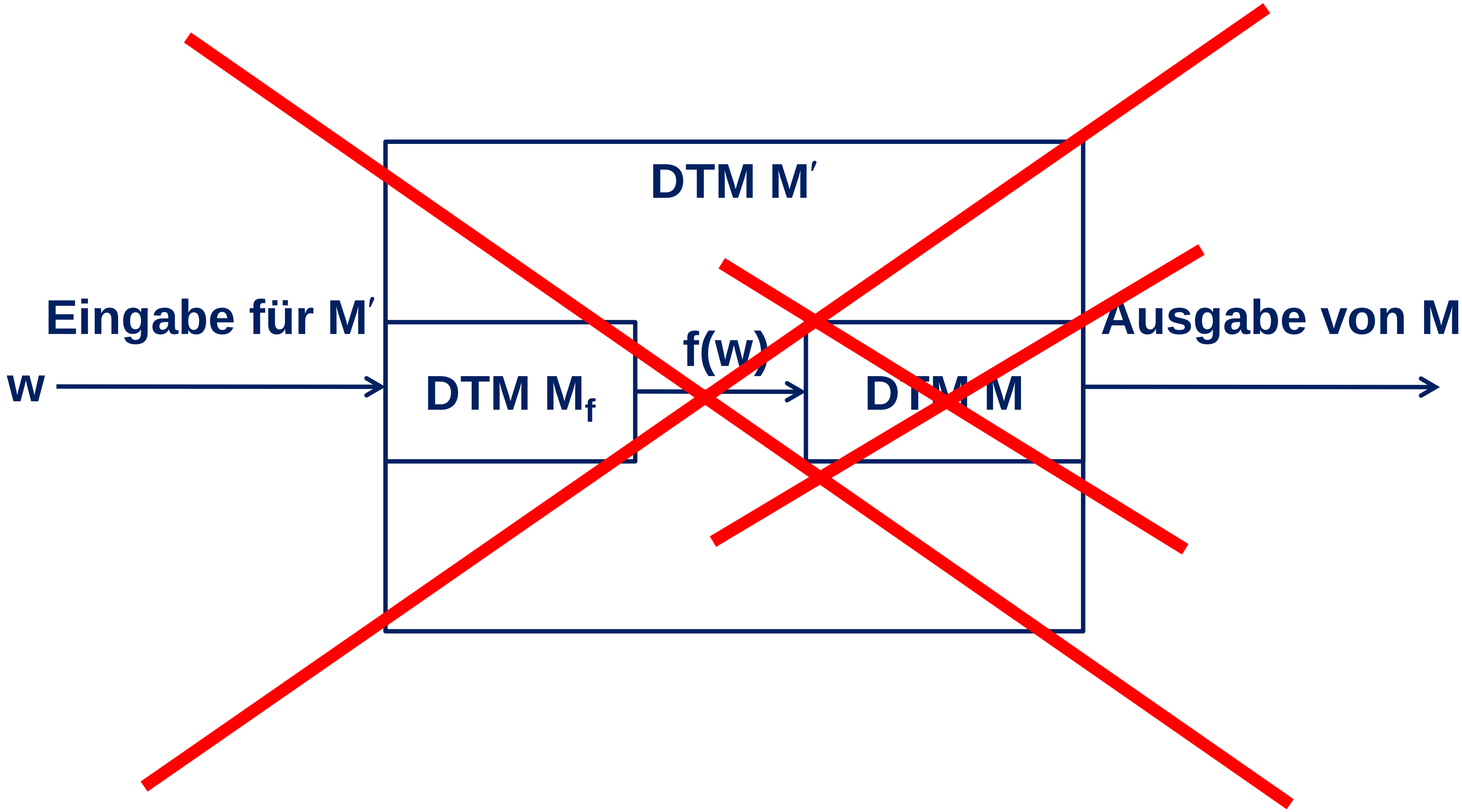
Lemma 2.35 $L', L \in \{0,1\}^*$ seien Sprachen mit $L' \leq L$.
Dann gilt:

1. Ist L entscheidbar, so ist auch L´ entscheidbar.
2. Ist L rekursiv aufzählbar, so ist auch L´ rekursiv aufzählbar.

Korollar 2.38 $L', L \in \{0,1\}^*$ seien Sprachen mit $L' \leq L$.
Dann gilt:

1. Ist L´ **nicht** entscheidbar, so ist auch L **nicht** entscheidbar.
2. Ist L´ **nicht** rekursiv aufzählbar, so ist auch L **nicht** rekursiv aufzählbar.

Graphische Darstellung von M′



Das Halteproblem revisited

Satz 2.39 Das Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Zur Erinnerung:

Satz 2.18 Das Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

Satz 2.12 L ist genau dann entscheidbar, wenn L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind.

Es reicht zu zeigen, dass das Komplement des Halteproblems nicht rekursiv aufzählbar ist.

Das Komplement des Halteproblems

Satz 2.39 Das Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis:

$H := \{w \in \{0,1\}^* \mid$ w ist von der Form $\langle M \rangle x$ für eine DTM M und M hält bei Eingabe x. $\}$

$\overline{H} := \{w \in \{0,1\}^* \mid$ w ist nicht von der Form $\langle M \rangle x$ für eine DTM M oder $w = \langle M \rangle x$ für eine DTM M, die bei Eingabe x nicht hält.$\}$

Zu zeigen: $\overline{H}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.
Unser Ansatz: Diag $\leq \overline{H}$.

Das Komplement des Halteproblems

Diag:= $\left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und DTM } M_i \text{ akzeptiert } w = w_i \textit{ nicht}. \right\}$

$\overline{H}$**:=**$\{w \in \{0,1\}^* \mid$ **w ist nicht von der Form $\langle M \rangle x$ für eine DTM M oder $w = \langle M \rangle x$ für eine DTM M, die bei Eingabe x nicht hält.**$\}$

$$
\begin{aligned}
f:\quad \{0,1\}^* &\to \{0,1\}^* \\
w &\to \langle M_j^\infty \rangle w, \text{ wobei } w = w_j.
\end{aligned}
$$

M^∞ verhält sich wie M, geht aber in Endlosschleife, wenn M in Zustand q_{reject} geht.

Das Komplement des Halteproblems

$\overline{H} := \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist nicht von der Form $\langle M \rangle x$ für eine DTM M oder $w = \langle M \rangle x$ für eine DTM M, die bei Eingabe x nicht hält.$\}$

$$f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$
$$w \to \langle M_j^\infty \rangle w, \text{ wobei } w = w_j.$$

M_f bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$:

1. Berechne j mit $w = w_j$.
2. Konstruiere die DTM M_j^∞ und gebe $\langle M_j^\infty \rangle w$ aus .

Das Komplement des Halteproblems

Korollar 2.40 Die Sprache $\overline{H}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Korollar 2.41
(i) Die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist von der Klasse der entscheidbaren Sprachen verschieden.

(ii) Die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist nicht gegen Komplementbildung abgeschlossen.

Akzeptanzproblem und Useful

Satz 2.42 Das Akzeptanzproblem A und die Sprache Useful sind nicht entscheidbar.

Zur Erinnerung:

Lemma 2.36 Das Halteproblem kann auf das Akzeptanzproblem reduziert werden, also $H \leq A$.

Lemma 2.37 Das Akzeptanzproblem kann auf die Sprache Useful reduziert werden, also $A \leq \text{Useful}$.

Die Sprache H_0

$H_0 := \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist DTM, die bei Eingabe } \varepsilon \text{ hält.}\}$

Satz 2.43 Das Halteproblem mit leerem Band H_0 ist nicht entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $H \leq H_0$.

Satz folgt dann aus Korollar 2.38 und H nicht entscheidbar (Satz 2.39).

Die Sprache H_0

M_x bei Eingabe $z \in \{0,1\}^*$:

1. Lösche z vom Band und schreibe x auf das Band.
2. Simuliere M mit Eingabe x.

$$f(w) := \begin{cases} w & \text{falls } w \text{ nicht von der Form } \langle M \rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ ist.} \\ \langle M_x \rangle & \text{falls } w = \langle M \rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ ist.} \end{cases}$$

Weitere Sprachen

$\{\langle M\rangle \mid$ M hält bei jeder Eingabe.$\}$ **Totalitätsproblem**

$\{\langle M\rangle \mid$ M hält für endlich viele Eingaben.$\}$
Endlichkeitsproblem

$\{(\langle M\rangle, \langle M'\rangle \mid$ M und M' akzeptieren die gleiche Sprache.$\}$
Äquivalenzproblem

Das Äquivalenzproblem

$\{(\langle M\rangle, \langle M'\rangle \mid$ **M und M′ akzeptieren die gleiche Sprache.**$\}$

Satz **Das Äquivalenzproblem ist nicht rekursiv aufzählbar.**

Beweis:
Mittels Reduktion $\overline{H} \leq$ Äquivalenzproblem.

$$f(w) := \begin{cases} \langle M_1\rangle\langle M_1\rangle & \text{falls } w \text{ nicht von der Form } \langle M\rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ ist.} \\ \langle M_{acc(x)}\rangle\langle M^{reject}\rangle & \text{falls } w = \langle M\rangle x \text{ für eine DTM } M \text{ ist.} \end{cases}$$

Das Äquivalenzproblem

$M_{acc(x)}$ bei Eingabe $z \in \{0,1\}^*$:

1. **Lösche z vom Band und schreibe x auf das Band.**
2. **Simuliere M mit Eingabe x.**
3. **Falls M mit Eingabe x hält, akzeptiere.**

Das Totalitätsproblem

$\{\langle M\rangle \mid$ M hält bei jeder Eingabe.$\}$

Satz 2.44 **Das Totalitätsproblem ist nicht rekursiv aufzählbar.**

Beweis:
Mittels Reduktion $\overline{H} \leq$ Totalitätsproblem.

Das Totalitätsproblem

$M^{(x)}$ bei Eingabe $z \in \{0,1\}^*$:

1. Berechne $|z|$.
2. Simuliere M mit Eingabe x für $|z|$ Schritte.
3. Falls M während der $|z|$ Schritte hält, gehe in eine Endlosschleife.
4. Sonst akzeptiere z.

$$f(w) := \begin{cases} \langle M^{accept} \rangle & \text{falls } w \text{ nicht von der Form } \langle M \rangle x \text{ für eine DTM M ist.} \\ \langle M^{(x)} \rangle & \text{falls } w = \langle M \rangle x \text{ für eine DTM M ist.} \end{cases}$$

Das Endlichkeitsproblem

$\{\langle M\rangle \mid$ M hält für endlich viele Eingaben.$\}$

Mittels $M^{(x)}$ kann gezeigt werden, dass $H \leq$ Endlichkeitsproblem, d.h. das Endlichkeits-problem ist nicht entscheidbar.

Beweis, dass das Endlichkeitsproblem nicht rekursiv aufzählbar ist, führen wir hier nicht.

Der Satz von Rice (Entscheidungsprobleme)

Satz: Sei $\mathcal{L}_{re}$ die Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen und $\mathcal{L}$ eine nichttriviale Teilmenge von $\mathcal{L}_{re}$, d.h., $\mathcal{L} \neq \emptyset$ und $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_{re}$. Dann ist die Sprache

$$L_{\mathcal{L}} := \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathcal{L}\}$$

nicht entscheidbar.

Beweis:

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\emptyset \notin \mathcal{L}$. (Sonst weise nach, dass $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{re} \setminus \mathcal{L}$ nicht entscheidbar ist).
- Da $\mathcal{L}$ nichttrivial ist, existiert ein $L \in \mathcal{L}_{re}$ mit $L \in \mathcal{L}$ und damit eine DTM M_L mit $L(M_L) = L$.
- Damit wollen wir nachweisen, dass $A \leq L_{\mathcal{L}}$ für das Akzeptanzproblem A ist, woraus der Satz folgen würde.

Der Satz von Rice (Entscheidungsprobleme)

Beweis für $A \leq L_{\mathcal{L}}$:
Wir benötigen eine Funktion f mit $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in L_{\mathcal{L}}$.
Angenommen, w habe die Form $\langle M \rangle x$. Wir konstruieren daraus eine DTM M´, die bei Eingabe y wie folgt arbeitet:

- **simuliere M gestartet mit x**
- **falls M akzeptiert, dann simuliere M_L gestartet mit y**
- **akzeptiere genau dann wenn M_L akzeptiert**

Die folgende Funktion ergibt dann die Reduktion:

$$f(w) := \begin{cases} \langle M^{reject} \rangle & \text{falls } w \text{ nicht die Form } \langle M \rangle x \text{ hat} \\ \langle M' \rangle & \text{falls } w \text{ die Form } \langle M \rangle x \text{ hat} \end{cases}$$

Der Satz von Rice (Entscheidungsprobleme)

Beispiele:

1. **XOR ist eine entscheidbare Sprache (und damit auch rekursiv aufzählbar). Also gilt nach dem Satz von Rice, dass für**

   $$L_{\mathcal{L}} := \{\langle M\rangle \mid L(M)\in\mathcal{L}\} \text{ mit } \mathcal{L}=\{XOR\}$$

   gilt: $L_{\mathcal{L}}$ ist nicht entscheidbar, d.h. es ist nicht entscheid-bar, ob eine DTM M das XOR Problem löst.

2. **H ist eine rekursiv aufzählbare Sprache. Also gilt nach dem Satz von Rice, dass für**

   $$L_{\mathcal{L}} := \{\langle M\rangle \mid L(M)\in\mathcal{L}\} \text{ mit } \mathcal{L}=\{H\}$$

   gilt: $L_{\mathcal{L}}$ ist nicht entscheidbar, d.h. es ist nicht entscheid-bar, ob für DTM M L(M)=H ist.

Der Satz von Rice (Rechenprobleme)

Mit leichten Anpassungen kann auch der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 2.45 **Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller berechenbaren Funktionen und S eine Teilmenge von $\mathcal{R}$. Dann ist die Sprache**

$$L(S) := \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S.\}$$

nicht entscheidbar genau dann wenn S eine nichttriviale Teilmenge von $\mathcal{R}$ ist, d.h., $S \neq \emptyset$ und $S \neq \mathcal{R}$.

Der Satz von Rice (Rechenprobleme)

Beispiele:

1. **Sei S die Menge aller total berechenbaren Funktionen. Für eine DTM M ist dann die Aussage L(M)∈S identisch damit, dass M für alle Eingaben hält. Weiterhin ist S offensichtlich nichttrivial. Also ist**
$$L(S) = \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$
und damit auch das Totalitätsproblem nicht entscheidbar.

2. **Sei f eine berechenbare Funktion und S={f}. Dann ist S offensichtlich nichttrivial und damit**
$$L(S) = \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet } f\}$$
nicht entscheidbar.

Zusammenfassung

- Turingmaschinen als Berechnungsmodell
- Berechnung von DTMs – Rechenschritte, Konfigurationen, Nachfolgekonfigurationen
- Akzeptieren/Ablehnen von Worten/Eingaben
- Akzeptieren/Entscheiden von Sprachen
- Unterschied zwischen Akzeptieren und Entscheiden

Zusammenfassung

- Mehrband DTMs
- Simulationen
- Gödelnummern und universelle DTMs
- Eigenschaften von DTMs als Sprachen, Halteproblem,…
- Eigenschaften unendlicher Mengen
- Diagonalisierung und Diag als nicht rekursiv aufzählbare Sprache

Zusammenfassung

- Reduktionen, Reduktionen, Reduktionen
- Reduktionen und nicht entscheidbare oder nicht rekursiv aufzählbare Sprachen
- Halteproblem, Akzeptanzproblem, Halteproblem mit leerem Band
- Satz von Rice