Proseminar
Effiziente Algorithmen

Kapitel 7: Graphdurchlauf

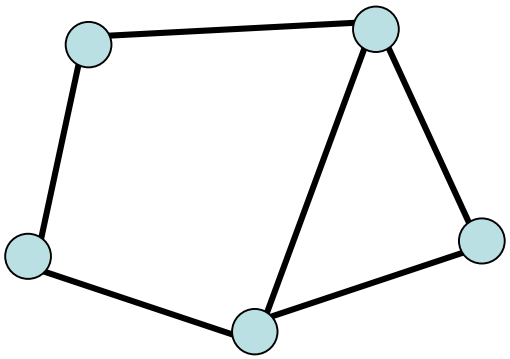
Prof. Dr. Christian Scheideler

WS 2019

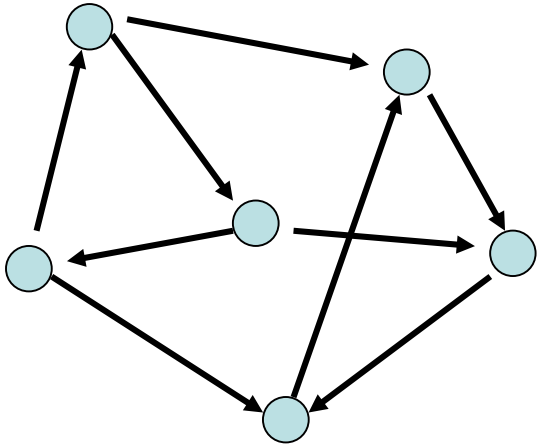
Graphen

Graph G=(V,E) besteht aus

- Knotenmenge V
- Kantenmenge E



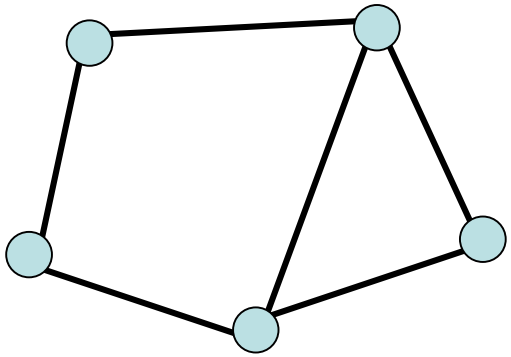
ungerichteter Graph



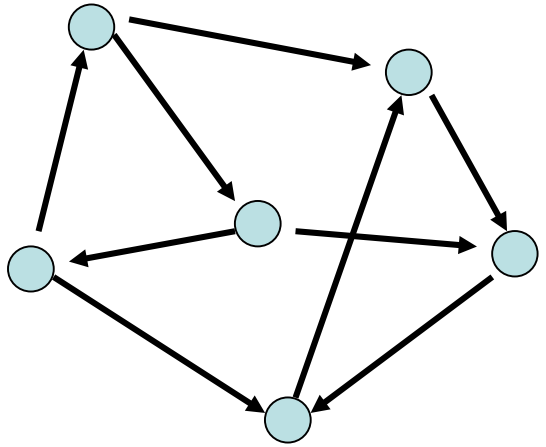
gerichteter Graph

Graphen

- Ungerichteter Graph: Kante repräsentiert durch Teilmenge $\{v,w\} \subseteq V$
- Gerichteter Graph: Kante repräsentiert duch Paar $(v,w) \in V \times V$ (bedeutet $v \longrightarrow w$)



ungerichteter Graph



gerichteter Graph

Graphen

Anwendungen:

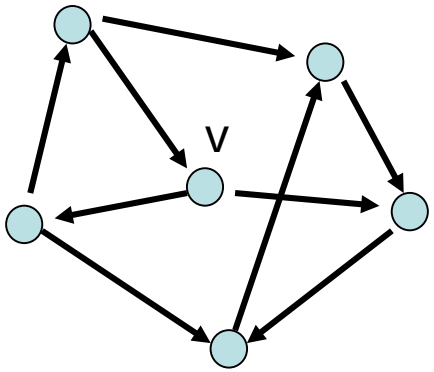
- Ungerichtete Graphen: Symmetrische Beziehungen jeglicher Art (z.B. $\{v,w\} \in E$ genau dann, wenn Distanz zwischen v und w maximal 1 km)
- Gerichtete Graphen: asymmetrische Beziehungen (z.B. $(v,w) \in E$ genau dann, wenn Person v Person w liebt)

Graphen

Definition 7.1:

a) Ein gerichteter Graph G ist ein Tupel $G=(V,E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$

b) Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph, sei $v \in V$:
   - $N(v)=\{w \in V \mid (v,w) \in E\}$: Menge der Nachfolger von v in G
   - $N^-(v)=\{u \in V \mid (u,v) \in E\}$: Menge der Vorgänger von v in G
   - $deg_{out}(v)=|N(v)|$: ausgehender Grad von v
   - $deg_{in}(v)=|N^-(v)|$: eingehender Grad von v



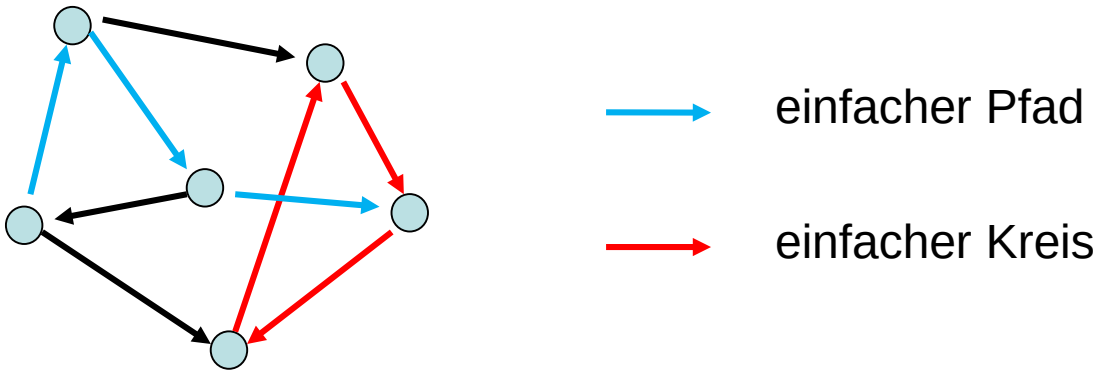
$deg_{in}(v) = 1$
$deg_{out}(v) = 2$

Graphen

Definition 7.2:

a) Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph.
   - Eine Folge $P=(v_1,...,v_k)$ mit $(v_i,v_{i+1})\in E$ für alle $i\in[k-1]$ ist ein Pfad in G.
   - Ein Kreis C ist ein Pfad $P=(v_1,...,v_k)$ mit $v_1=v_k$.
   - Ein Pfad (Kreis) ist einfach, falls $v_i\neq v_j$ für alle $i\neq j\in[k]$ (bzw. $i\neq j\in[k-1]$).
   - Ein Pfad (oder Kreis) kann auch durch eine Folge von Kanten angegeben werden.

b) Die Länge eines Pfades P (Kreises C) ist definiert als die Anzahl der Kanten in P (bzw. C).

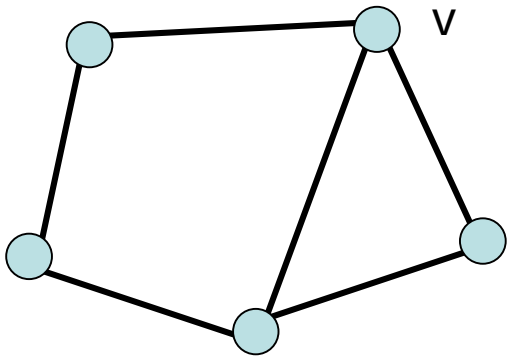


Graphen

Definition 7.3:

a) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel $G=(V,E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \wp^2(V)$

b) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph, sei $v \in V$:
   - $N(v)=\{w \in V \mid \{v,w\} \in E\}$: Menge der Nachbarn von v in G
   - $\deg(v)=|N(v)|$: Grad von v
   - Eine Folge $P=(v_1,...,v_k)$ mit $\{v_i,v_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in [k-1]$ ist ein Pfad in G.
   - Ein Kreis C ist ein Pfad $P=(v_1,...,v_k)$ mit $v_1=v_k$.



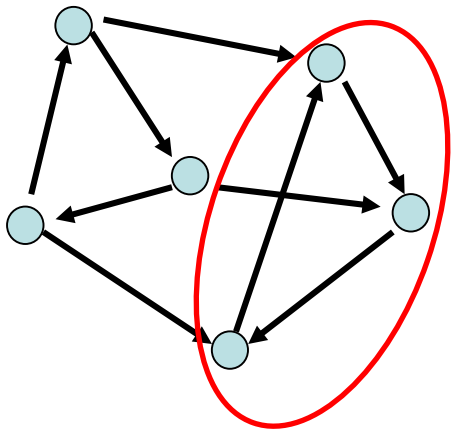
$\deg(v) = 3$

Graphen

Definition 7.4:

Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter (bzw. gerichteter) Graph.

- $n=|V|$: Anzahl der Knoten
- $m=|E|$: Anzahl der Kanten
- $v \rightsquigarrow_G w$: es gibt einen Pfad von v nach w in G
- Eine Menge $U \subseteq V$ heißt (starke) Zusammenhangskomponente von G, falls für alle Knoten $v,w \in U$ gilt, dass $v \rightsquigarrow_G w$, und es keine Übermenge von U mit dieser Eigenschaft gibt, das heißt, U maximal mit dieser Eigenschaft ist.
- G heißt (stark) zusammenhängend, falls V eine (starke) Zusammenhangskomponente in G ist.



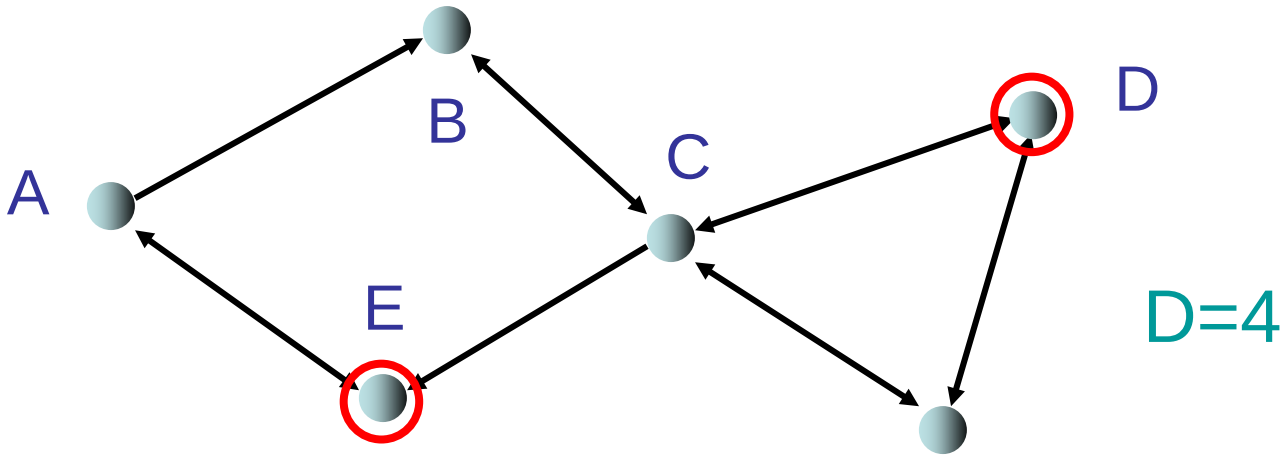
starke Zusammenhangskomponente

Graphen

Definition 7.5:

Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.

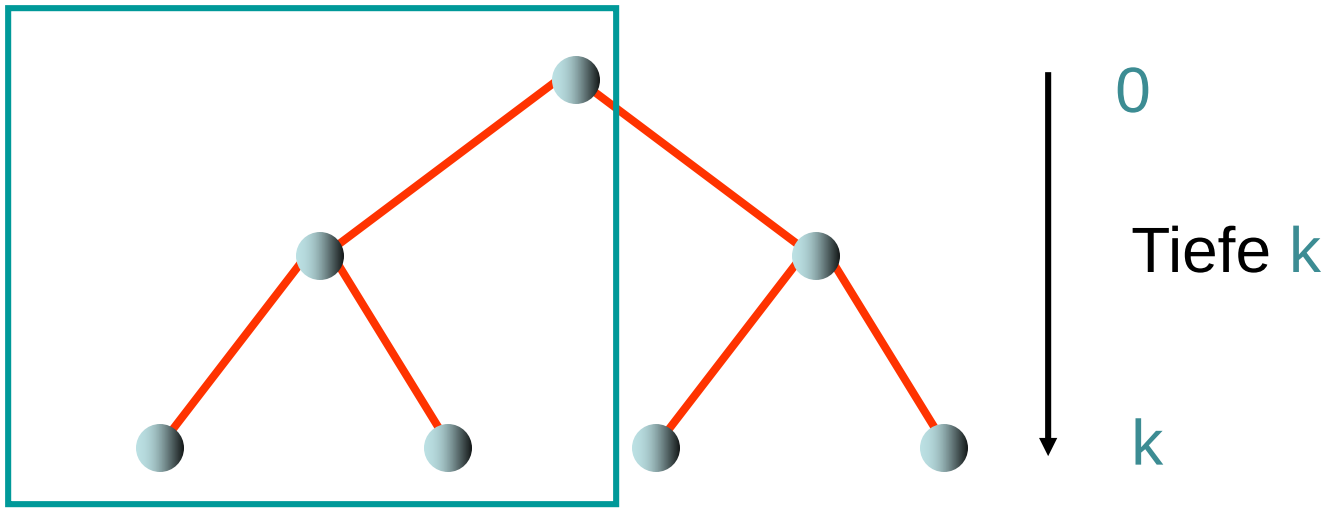
- Distanz $\delta(v,w)$: Länge eines kürzesten Weges von v nach w in G
- $D=\max_{v,w} \delta(v,w)$: Durchmesser von G
- $\alpha(G) = \min_{U \subseteq V, |U| \leq \lceil |V|/2 \rceil} |N(U)|/|U|$: Expansion von G



Lineare Liste

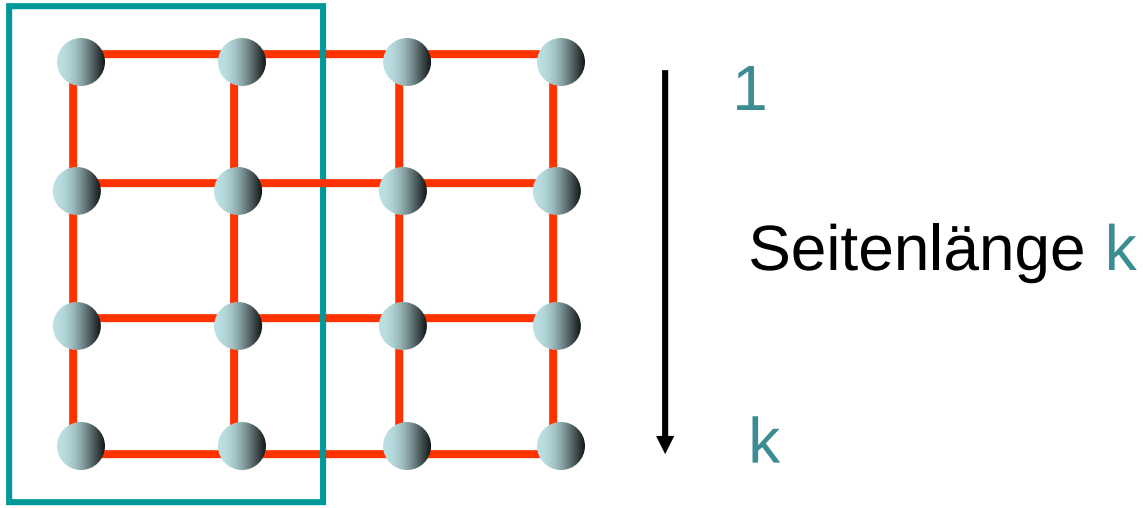
- Grad 2
- Hoher Durchmesser (n-1 für n Knoten)
- Niedrige Expansion (α(Liste) = 2/n)

Vollständiger binärer Baum



- $n=2^{k+1}-1$ Knoten, Grad 3
- Durchmesser ist $2k \sim 2 \log_2 n$
- Niedrige Expansion (α(Binärbaum)=2/n)

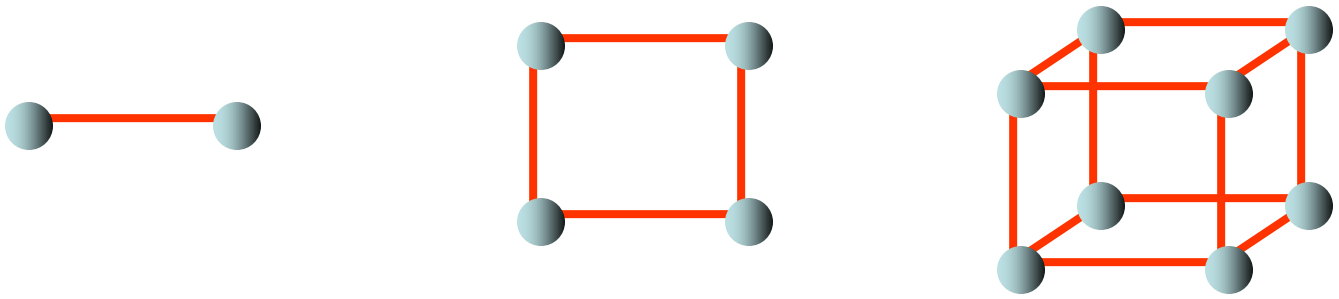
2-dimensionales Gitter



- $n = k^2$ Knoten, maximaler Grad 4
- Durchmesser ist $2(k-1) \sim 2\sqrt{n}$
- Expansion ist $\sim 2/\sqrt{n}$

Hypercube

- Knoten: $(x_1,\ldots,x_d)\in\{0,1\}^d$
- Kanten: $\forall i: (x_1,\ldots,x_d)\rightarrow(x_1,..,1\text{-}x_i,..,x_d)$



d=1 d=2 d=3

Grad d, Durchmesser d, Expansion $1/\sqrt{d}$

Expander

Satz 7.6: Für jeden Graph G ist die Expansion $\alpha(G)$ höchstens 1.

Satz 7.7: Es gibt Familien von Graphen konstanten Grades mit konstanter Expansion. Diese heißen Expander.

Beispiel: Gabber-Galil Graph

- Knotenmenge: $(x,y) \in \{0,\ldots,n-1\}^2$
- $(x,y) \rightarrow (x,x+y),(x,x+y+1), (x+y,y), (x+y+1,y) \pmod n$

Operationen auf Graphen

G=(V,E): Graph-Variable für gerichteten Graph

- Node: DS für Knoten, Edge: DS für Kanten

Operationen:

- G.insert(e: Edge): $E:=E\cup\{e\}$
- G.remove(i,j: Key): $E:=E\setminus\{e\}$ für die Kante e=(v,w) mit Key(v)=i und Key(w)=j
- G.insert(v: Node): $V:=V\cup\{v\}$
- G.remove(i: Key): sei $v\in V$ der Knoten mit Key(v)=i. $V:=V\setminus\{v\}$, $E:=E\setminus\{(x,y) \mid x=v \vee y=v\}$
- G.find(i: Key): gib Knoten v aus mit Key(v)=i
- G.find(i,j: Key): gib Kante (v,w) aus mit Key(v)=i und Key(w)=j

Operationen auf Graphen

Anzahl der Knoten oft fest. In diesem Fall:

- V={1,…,n} (Knoten hintereinander nummeriert, identifiziert durch ihre Keys)

Relevante Operationen:

- G.insert(e: Edge): E:=E∪{e}
- G.remove(i,j: Key): E:=E\{e} für die Kante e=(i,j)
- G.find(i,j: Key): gib Kante e=(i,j) aus

Operationen auf Graphen

Im folgenden: Konzentration auf statische Anzahl an Knoten.

Parameter für Laufzeitanalyse:

- n: Anzahl Knoten
- m: Anzahl Kanten
- d: maximaler Knotengrad (maximale Anzahl ausgehender Kanten von Knoten)

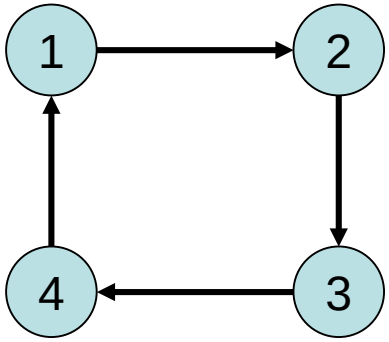
Graphrepräsentationen

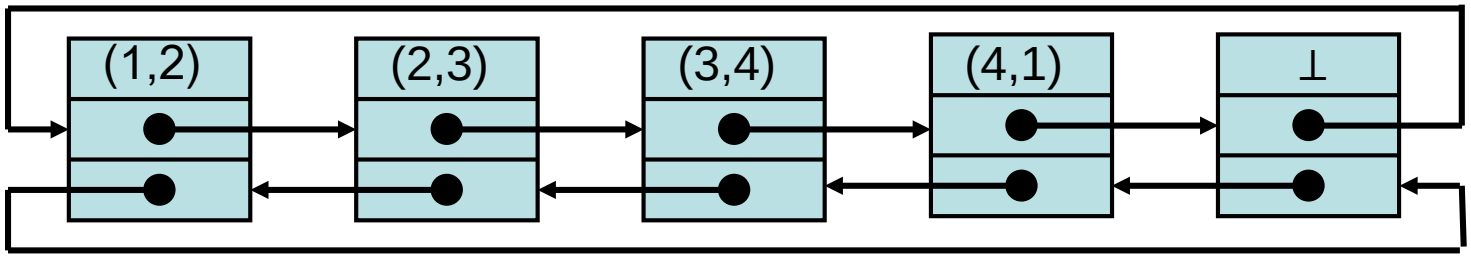
Wir betrachten folgende Repräsentationen:

1. Sequenz von Kanten
2. Adjazenzfeld
3. Adjazenzliste
4. Adjazenzmatrix
5. Adjazenzliste + Hashtabelle

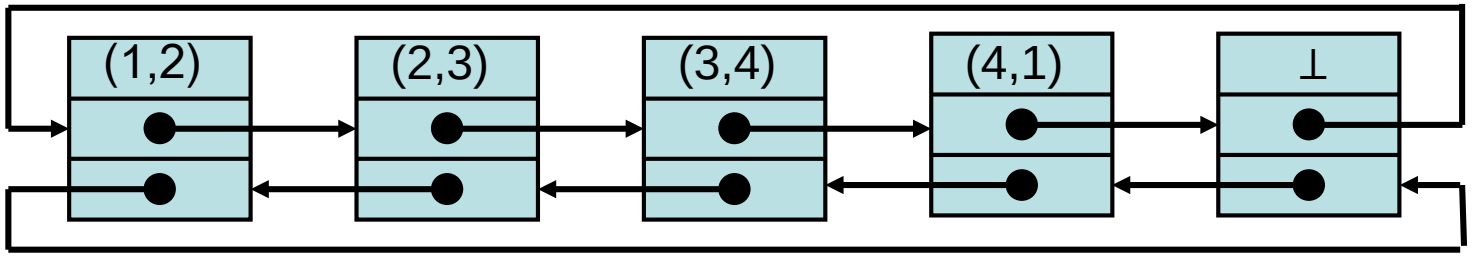
Graphrepräsentationen

1: Sequenz von Kanten





Sequenz von Kanten

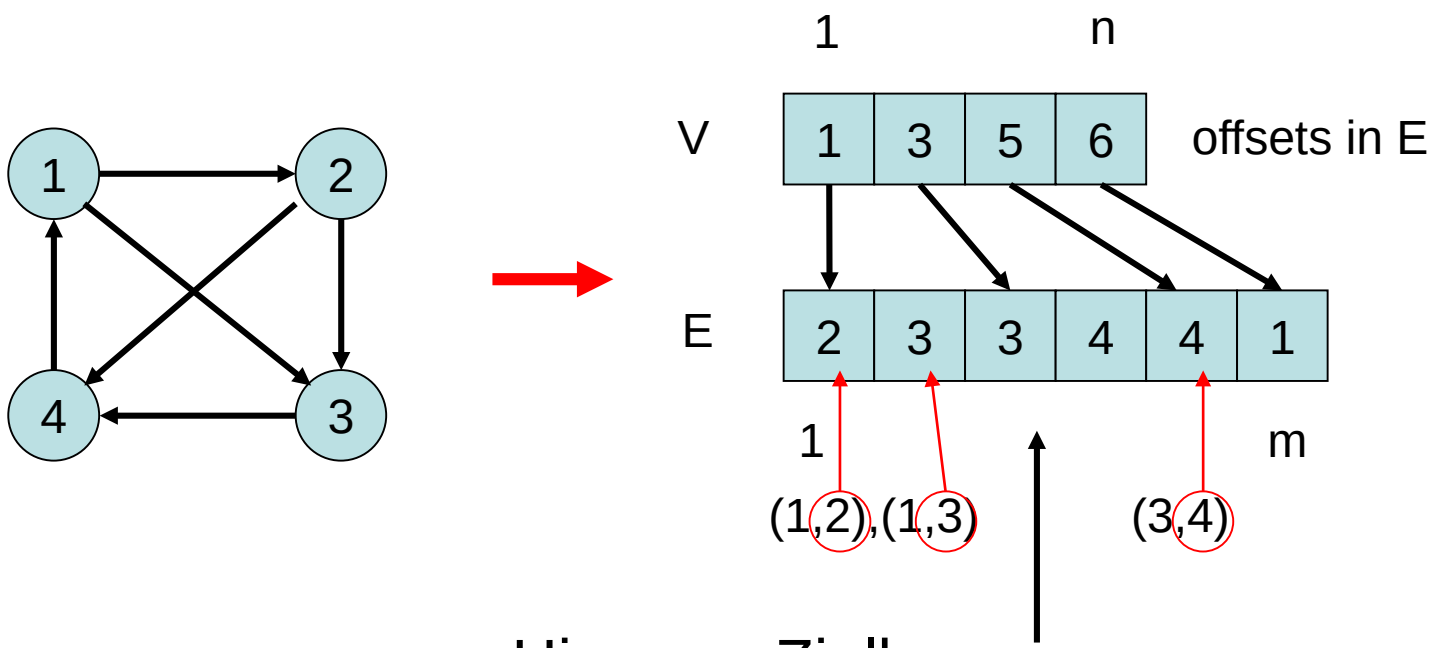


Zeitaufwand:

- G.find(i,j: Key): $\Theta(m)$ im worst case
- G.insert(e: Edge): $O(1)$
- G.remove(i,j: Key): $\Theta(m)$ im worst case

Graphrepräsentationen

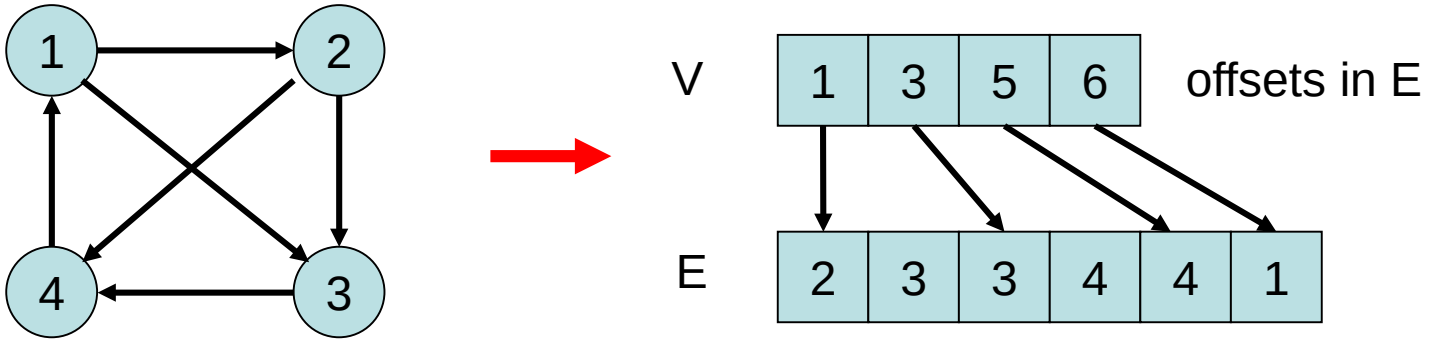
2: Adjazenzfeld



Hier: nur Zielkeys

In echter DS: E: Array [1..m] of Edge

Adjazenzfeld

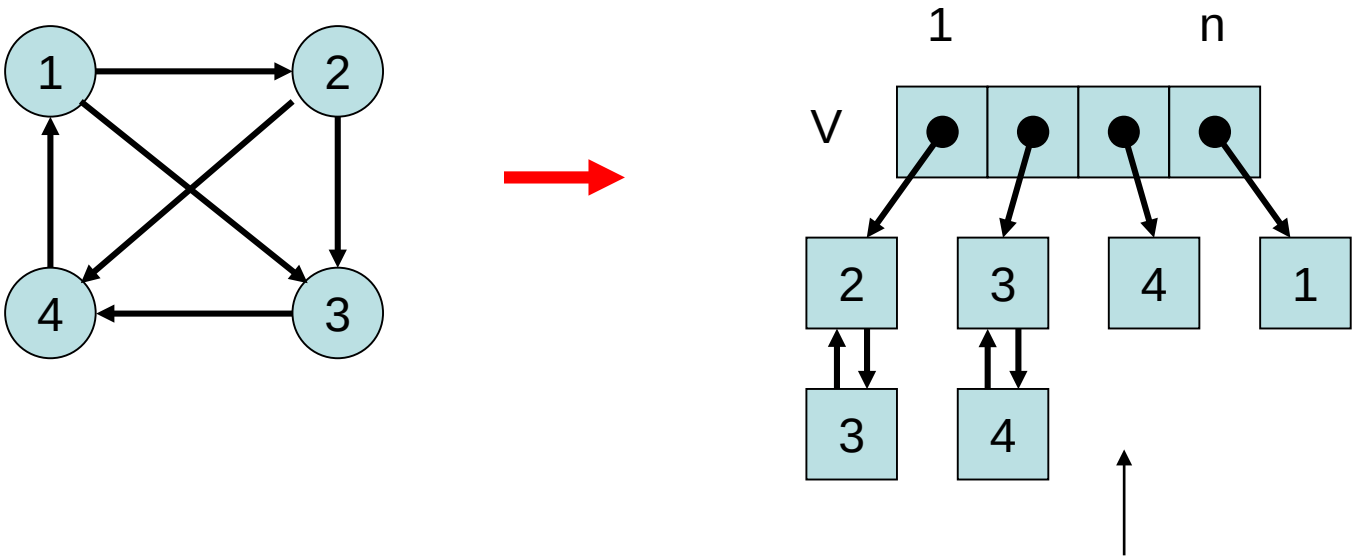


Zeitaufwand:

- G.find(i,j: Key): Zeit O(d)
- G.insert(e: Edge): Zeit O(m) (worst case)
- G.remove(i,j: Key): Zeit O(m) (worst case)

Graphrepräsentationen

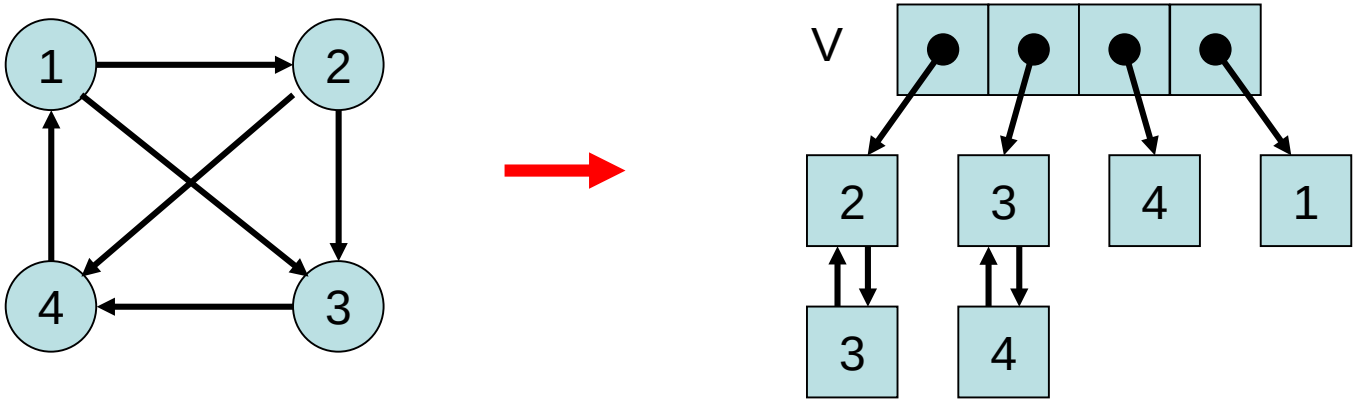
3: Adjazenzliste



Hier: nur Zielkeys

In echter DS: V: Array [1..n] of List of Edge

Adjazenzliste



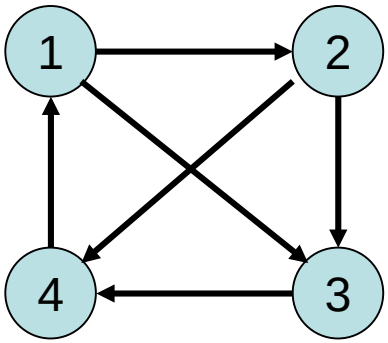
Zeitaufwand:

- G.find(i,j: Key): Zeit O(d)
- G.insert(e: Edge): Zeit O(1)
- G.remove(i,j: Key): Zeit O(d)

Problem: d kann groß sein!

Graphrepräsentationen

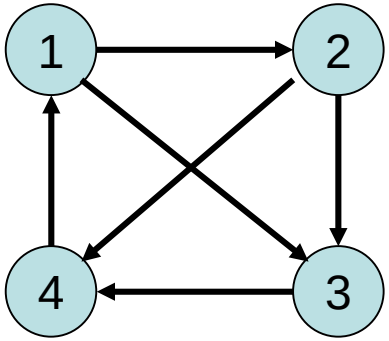
4: Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A[i,j] \in \{0,1\}$ (bzw. Zeiger auf Edge)
- $A[i,j]=1$ genau dann, wenn $(i,j) \in E$

Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

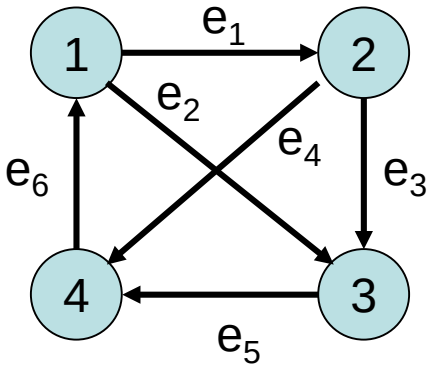
Zeitaufwand:

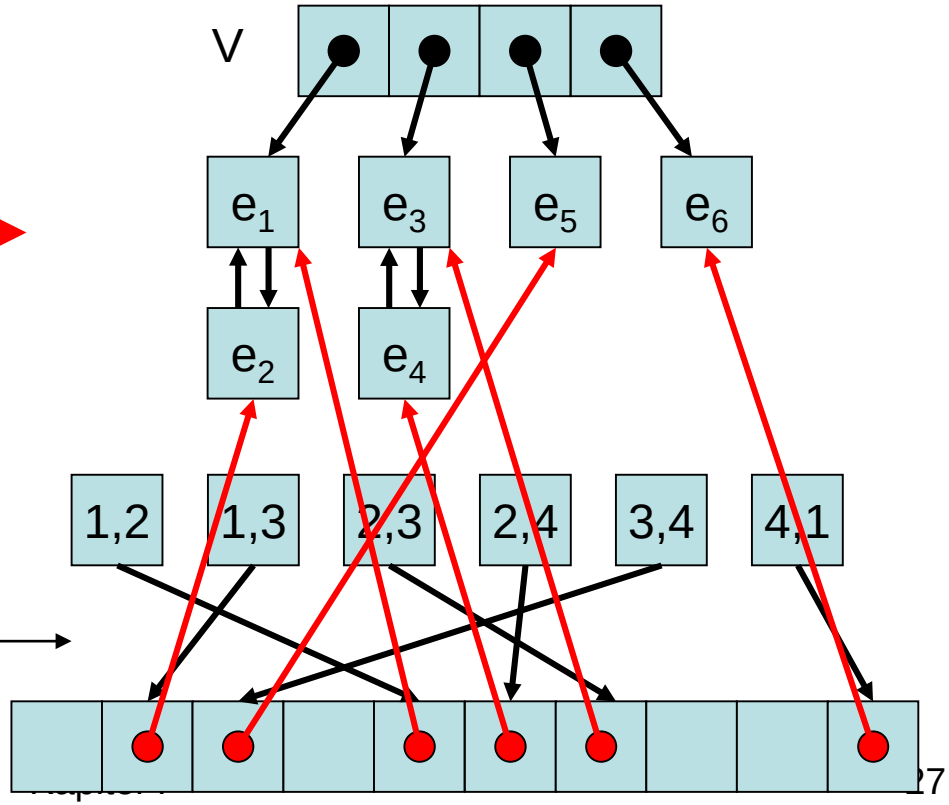
- G.find(i,j: Key): Zeit O(1)
- G.insert(e: Edge): Zeit O(1)
- G.remove(i,j: Key): Zeit O(1)

Aber: Speicher-aufwand $O(n^2)$

Graphrepräsentationen

5: Adjazenzliste + Hashtabelle



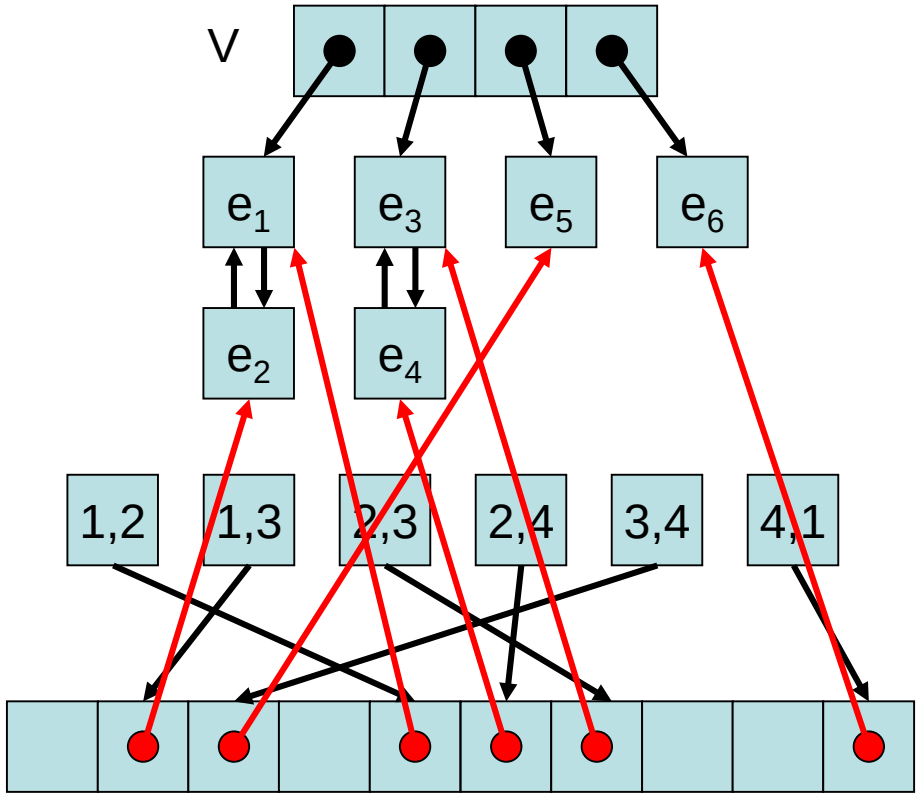


z.B. Kuckuckshashing+

Adjazenzliste+Hashtabelle

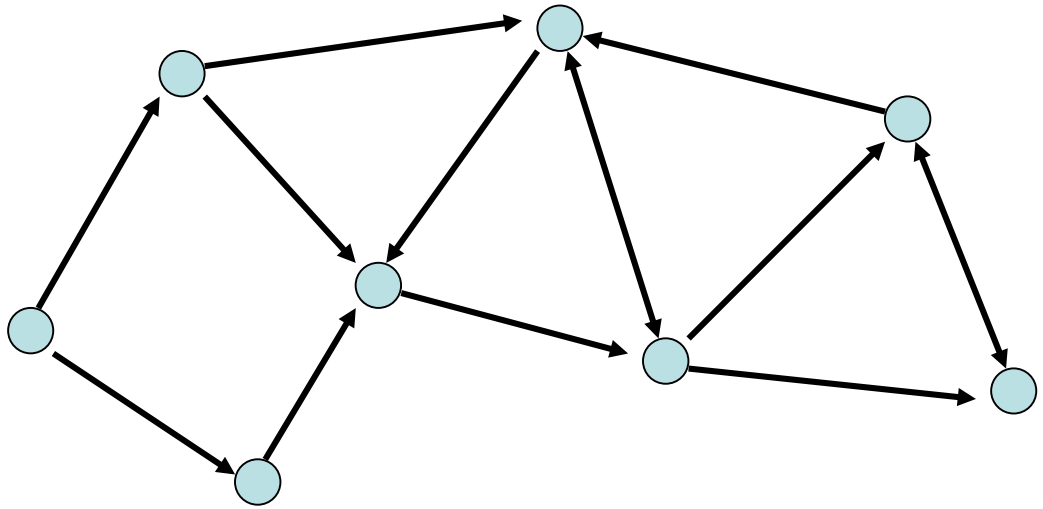
Zeitaufwand:

- G.find(i,j: Key): O(1) (m.h.W.)
- G.insert(e: Edge): O(1) (m.h.W.)
- G.remove(i,j: Key): O(1) (m.h.W.)
- Speicher: O(n+m)



Graphdurchlauf

Zentrale Frage: Wie können wir die Knoten eines Graphen durchlaufen, so dass jeder Knoten mindestens einmal besucht wird?



Graphdurchlauf

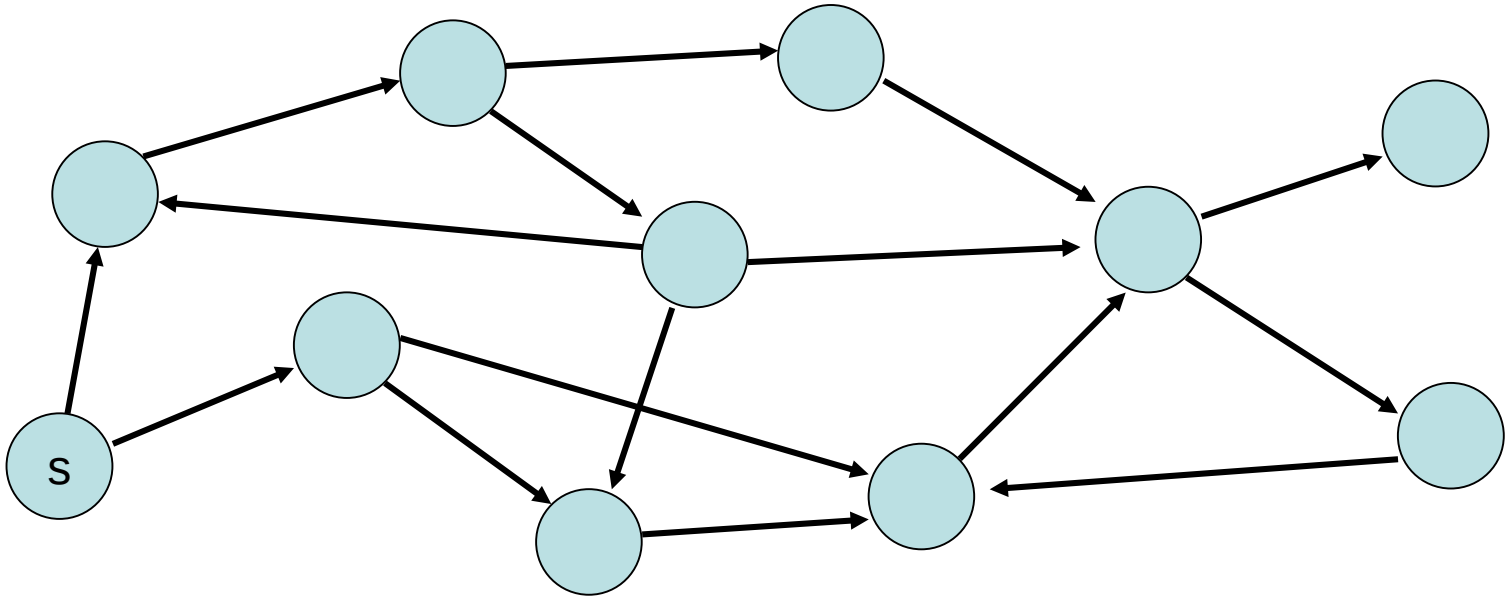
Zentrale Frage: Wie können wir die Knoten eines Graphen durchlaufen, so dass jeder Knoten mindestens einmal besucht wird?

Grundlegende Strategien:

- Breitensuche
- Tiefensuche

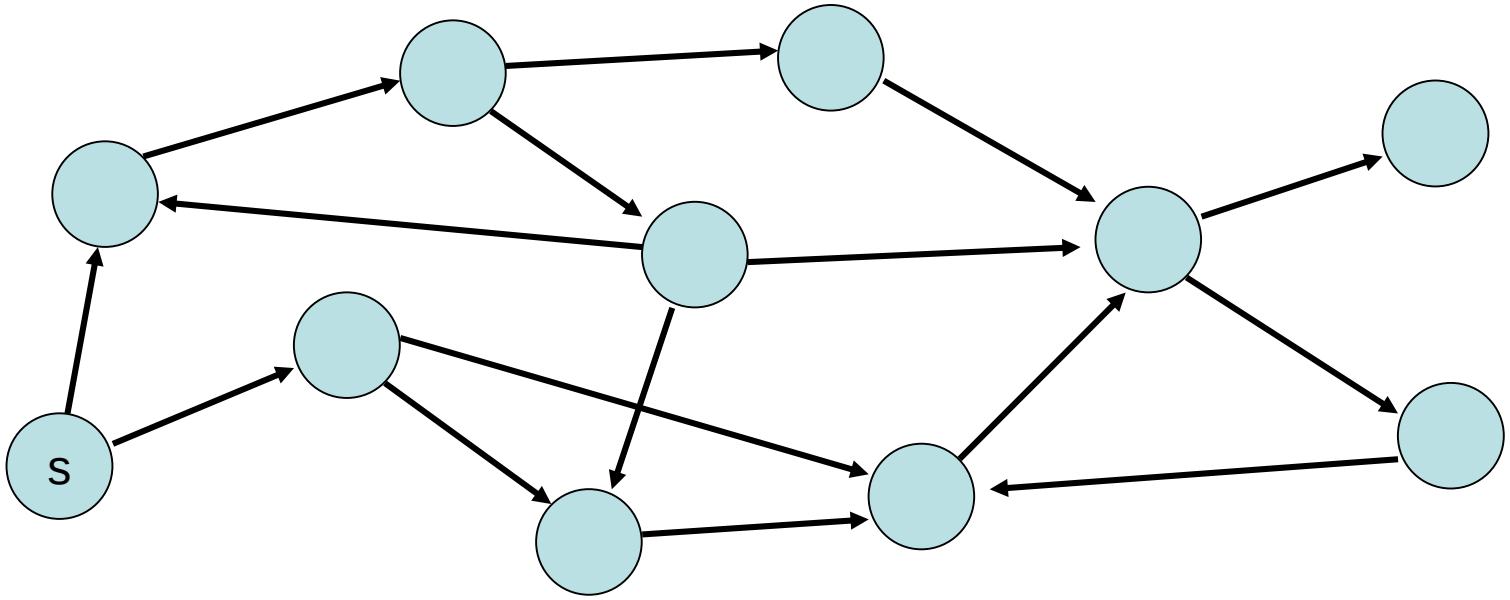
Breitensuche

- Starte von einem Knoten s
- Exploriere Graph Distanz für Distanz



Tiefensuche

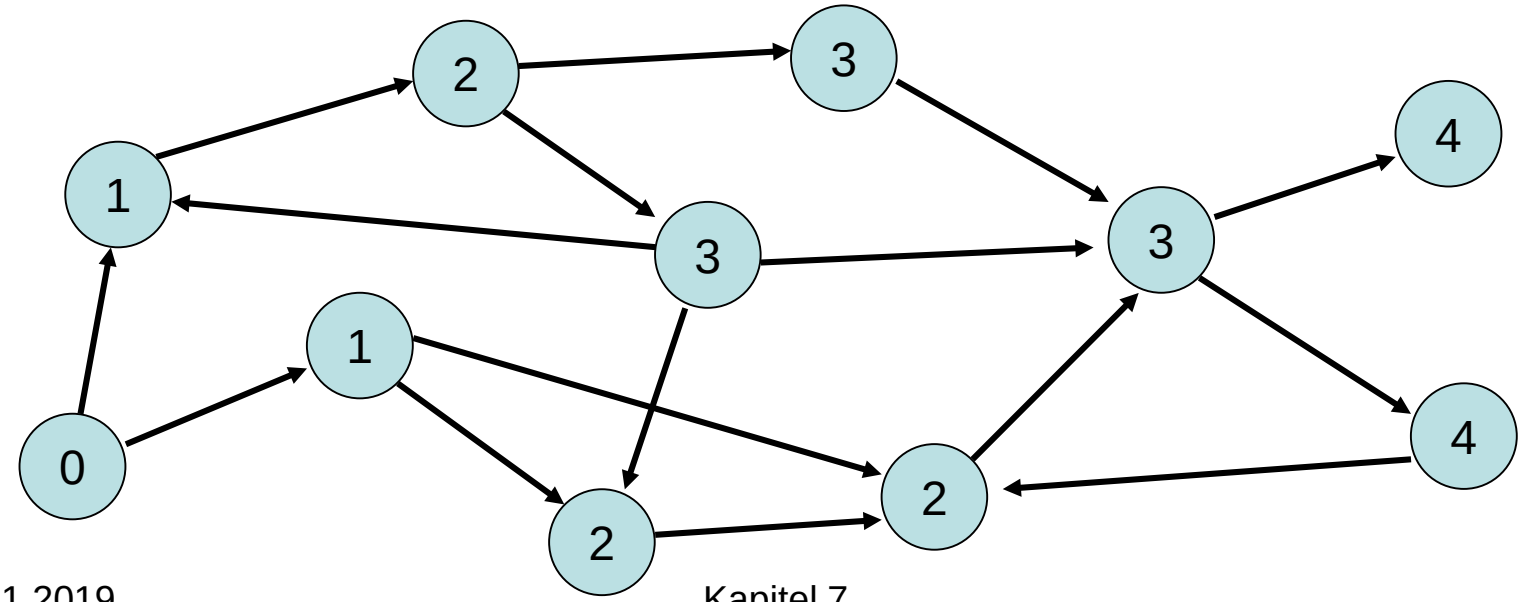
- Starte von einem Knoten s
- Exploriere Graph in die Tiefe
  (: aktuell, : noch aktiv, : fertig)



Breitensuche

- d(v): Distanz von Knoten v zu s (d(s)=0)
- parent(v): Knoten, von dem v besucht

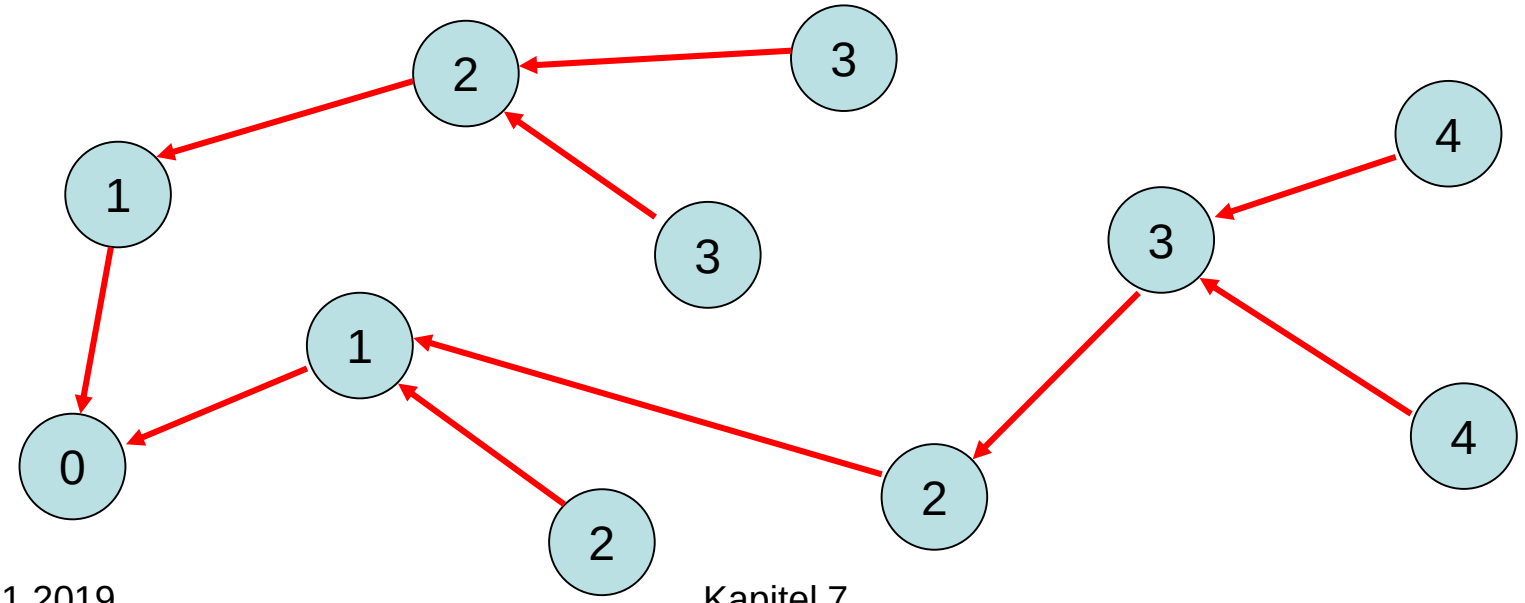
Distanzen:



Breitensuche

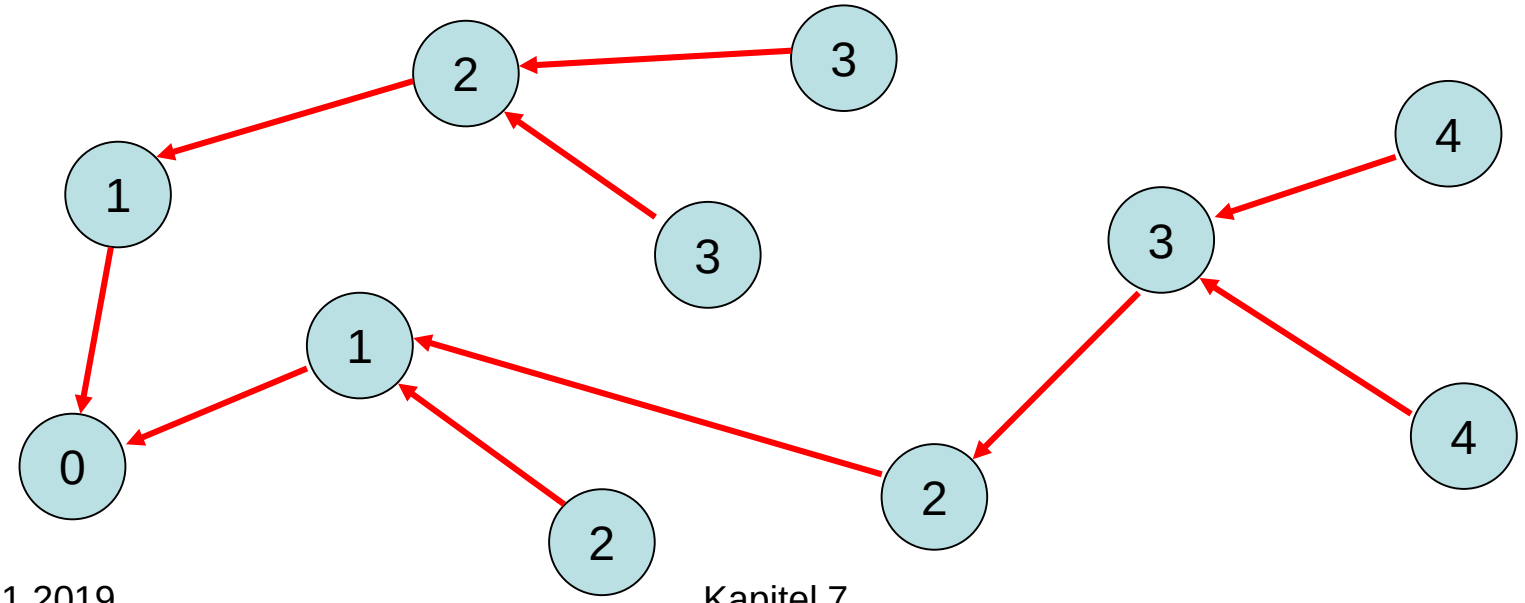
- d(v): Distanz von Knoten v zu s (d(s)=0)
- parent(v): Knoten, von dem v besucht

Mögliche Parent-Beziehungen in rot:



Breitensuche

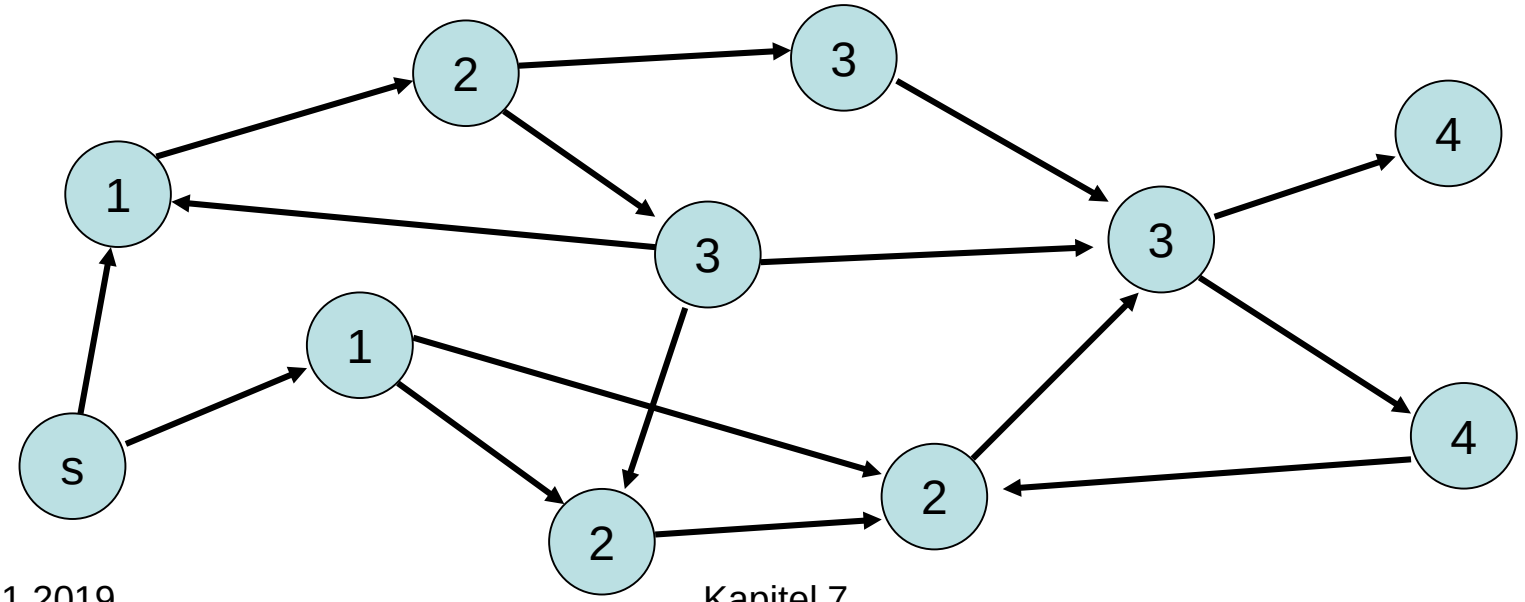
Parent-Beziehung eindeutig: wenn Knoten v zum erstenmal besucht wird, wird parent(v) gesetzt und v markiert, so dass v nicht nochmal besucht wird



Breitensuche

Kantentypen:

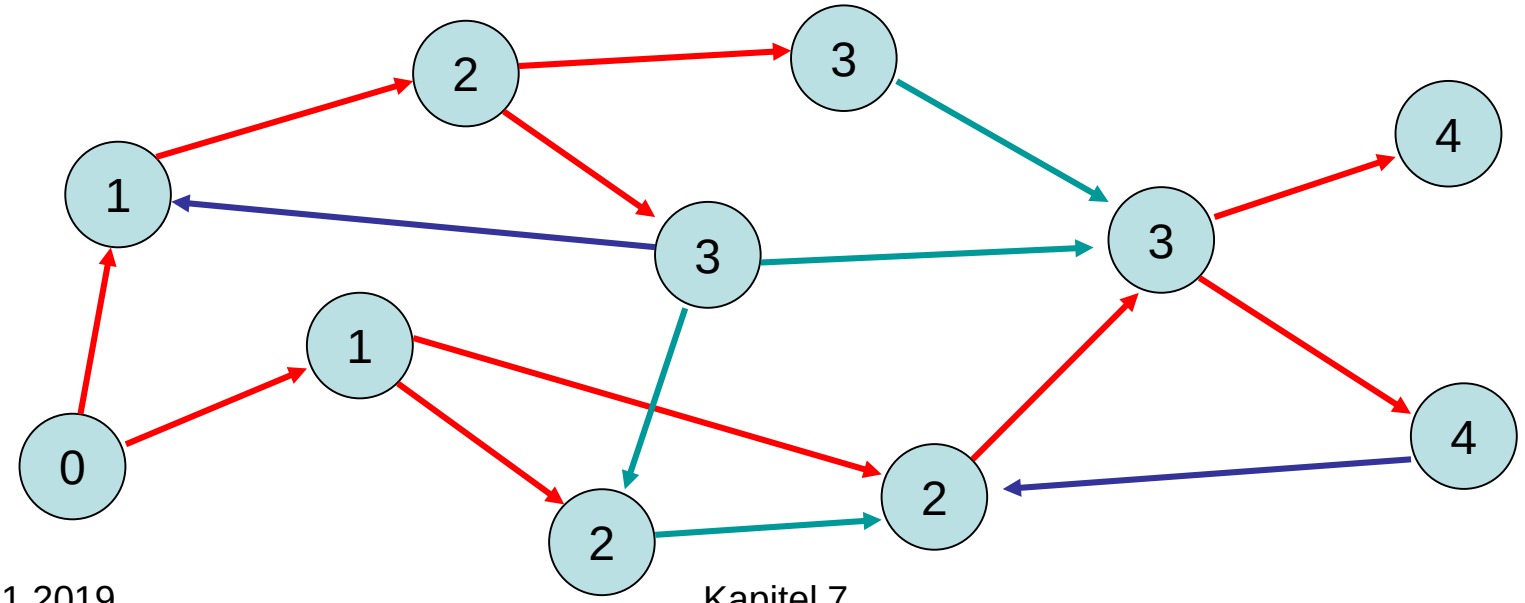
- Baumkante: zum Kind
- Rückwärtskante: zu einem Vorfahr
- Kreuzkante: alle sonstige Kanten



Breitensuche

Kantentypen:

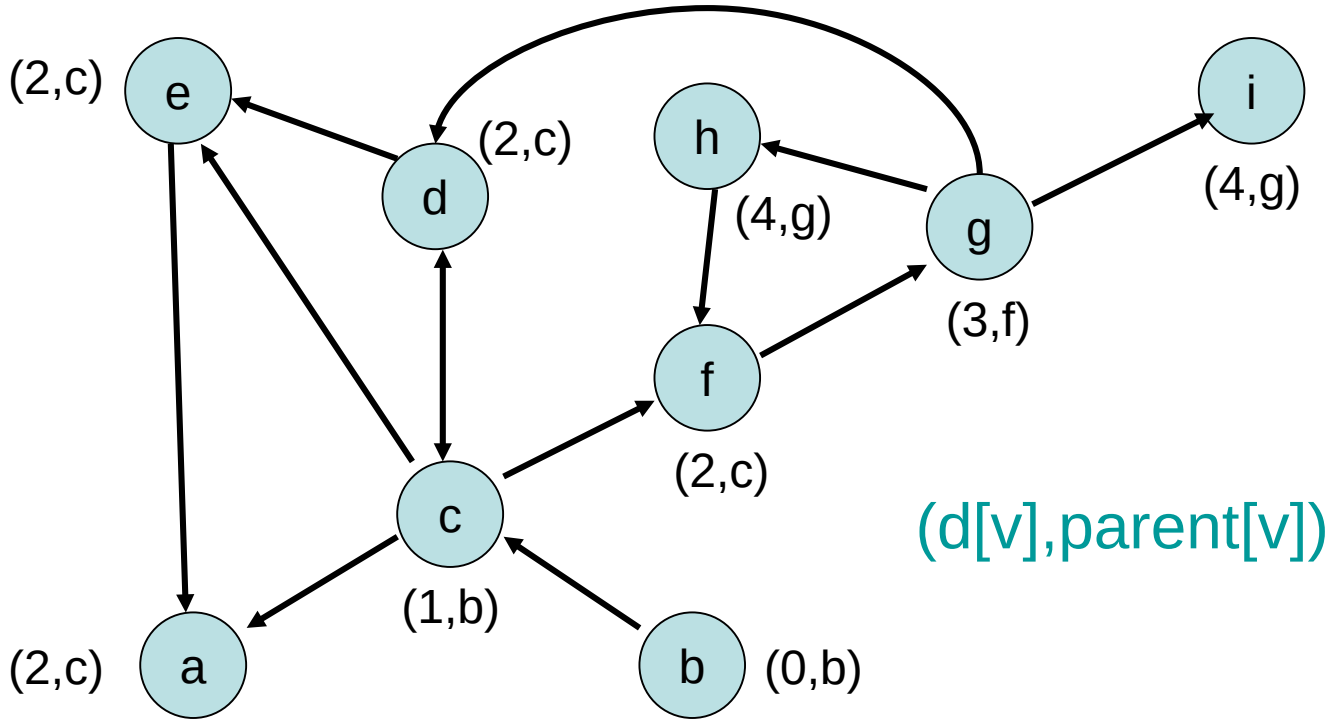
- Baumkante: zum Kind
- Rückwärtskante: zu einem Vorfahr
- Kreuzkante: alle sonstige Kanten



Breitensuche

```
Procedure BFS(s: Node)
    d = <∞,…, ∞>: Array [1..n] of IN
    parent = <⊥,…,⊥>: Array [1..n] of Node
    d[Key(s)]:=0              // s hat Distanz 0 zu sich
    parent[Key(s)]:=s         // s ist sein eigener Vater
    q:=<s>: List of Node      // q:Queue zu besuchender Knoten
    while q ≠ <> do           // solange q nicht leer
        u:= q.popFront()      // nimm Knoten nach FIFO-Regel
        foreach (u,v)∈E do
            if parent(Key(v))=⊥ then  // v schon besucht?
                q.pushBack(v)  // nein, dann in q hinten einfügen
                d[Key(v)]:=d[Key(u)]+1
                parent[Key(v)]:=u
```

BFS(b)

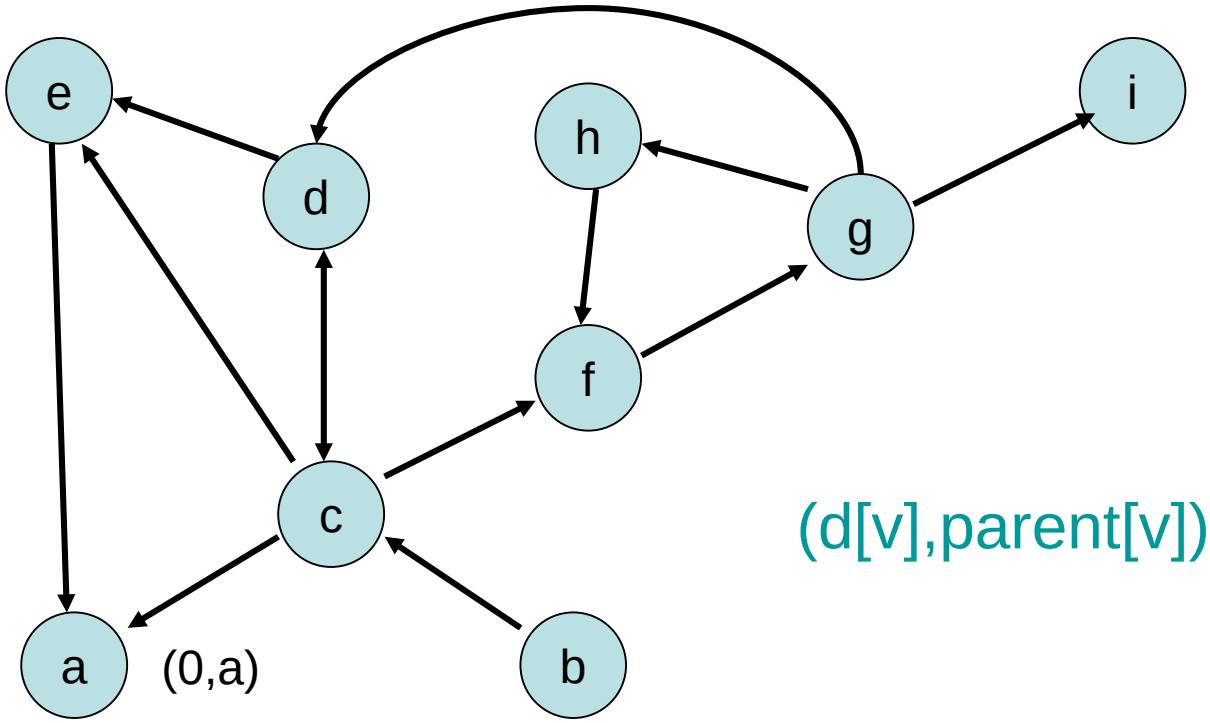


(d[v],parent[v])-Werte

: besucht, noch in q

: besucht, nicht mehr in q

BFS(a)

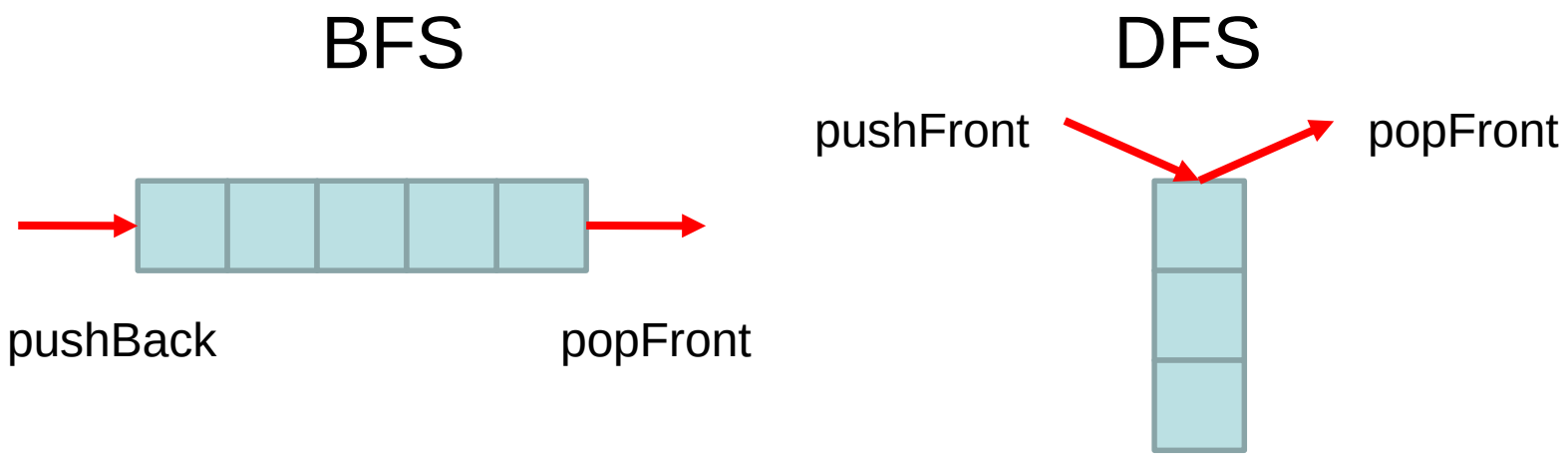


(d[v],parent[v])-Werte

Von a kein anderer Knoten erreichbar.

Tiefensuche

Einsicht: BFS-Algorithmus kann einfach in einen DFS-Algorithmus umgewandelt werden, wenn anstelle einer FIFO Queue für die Knotenbehandlung ein Stack verwendet wird.

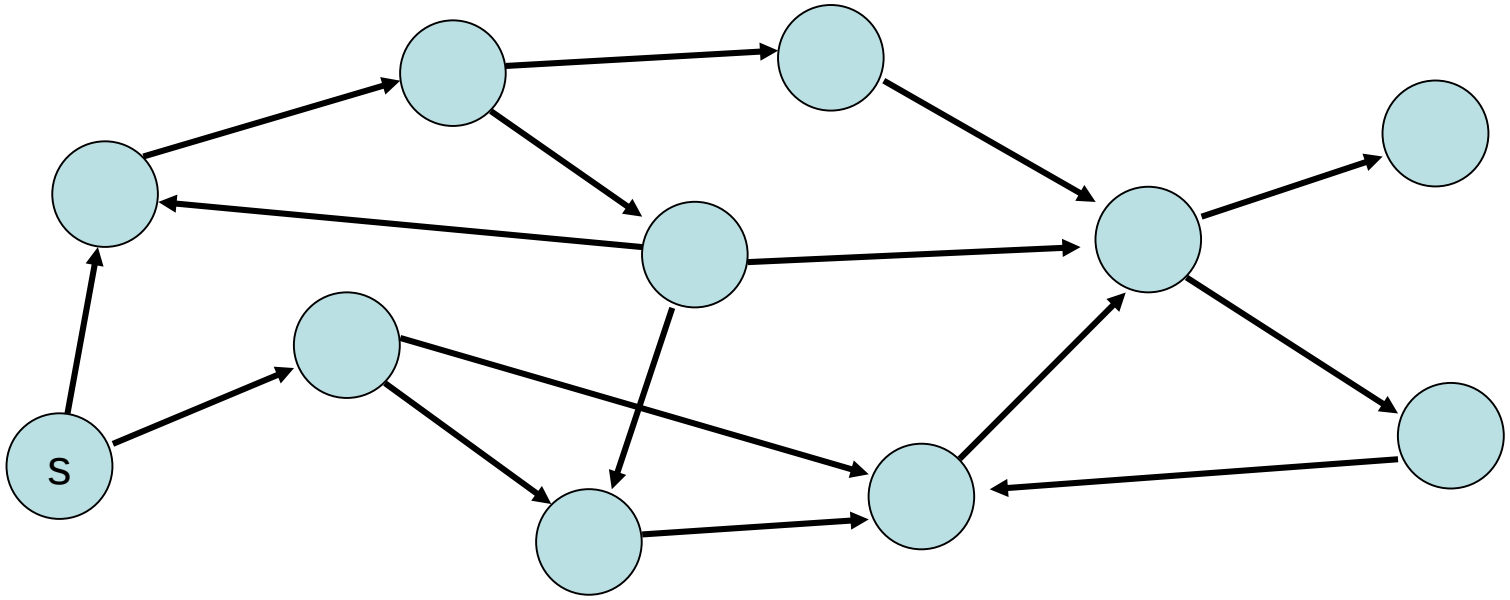


Tiefensuche

```
Procedure DFS(s: Node)
    d = <∞,…, ∞>: Array [1..n] of IN
    parent = <⊥,…,⊥>: Array [1..n] of Node
    d[Key(s)]:=0              // s hat Distanz 0 zu sich
    parent[Key(s)]:=s         // s ist sein eigener Vater
    q:=<s>: List of Node      // q:Stack zu besuchender Knoten
    while q ≠ <> do           // solange q nicht leer
        u:= q.popFront()      // nimm Knoten nach FIFO-Regel
        foreach (u,v)∈E do
            if parent(Key(v))=⊥ then  // v schon besucht?
                q.pushFront(v)  // nein, dann in q vorne einfügen
                d[Key(v)]:=d[Key(u)]+1
                parent[Key(v)]:=u
```

Tiefensuche

- Starte von einem Knoten s
- Exploriere Graph in die Tiefe
  (: aktuell, : im Stack, : fertig)



Tiefensuche – Alternatives Schema

```
Übergeordnete Prozedur:
    unmark all nodes
    init()
    foreach s∈V do  // stelle sicher, dass alle Knoten besucht werden
        if s is not marked then
            mark s
            root(s)
            DFS(s,s)    // s: Startknoten

Procedure DFS(u,v: Node)  // u: Vater von v
    foreach (v,w)∈E do
        if w is marked then traverseNonTreeEdge(v,w)
        else traverseTreeEdge(v,w)
            mark w
            DFS(v,w)
    backtrack(u,v)
```

Prozeduren in rot: noch zu spezifizieren

DFS-Nummerierung

Variablen:

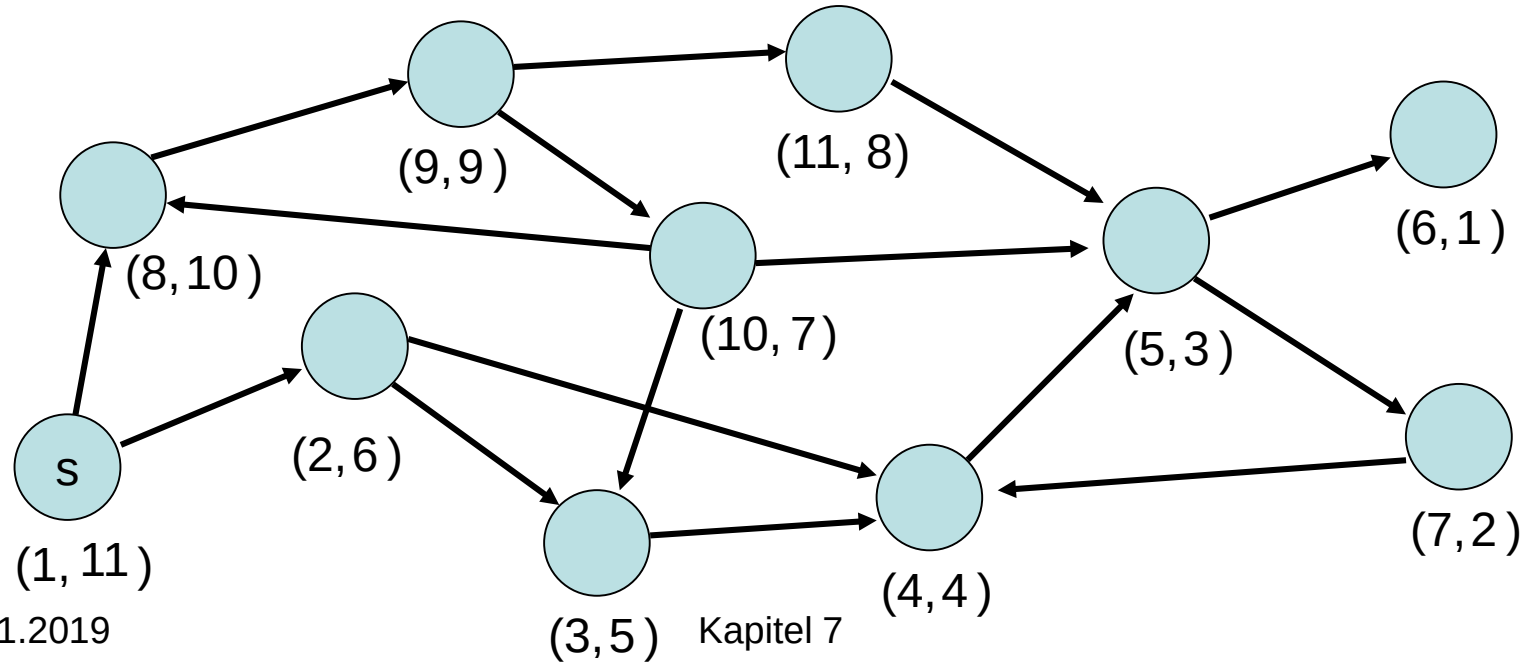
- dfsNum: Array [1..n] of IN // Zeitpunkt wenn Knoten 
- finishTime: Array [1..n] of IN // Zeitpunkt wenn Knoten 
- dfsPos, finishingTime: IN // Zähler

Proceduren:

- init():
  dfsPos:=1; finishingTime:=1
- root(s):
  dfsNum[s]:=dfsPos; dfsPos:=dfsPos+1
- traverseTreeEdge(v,w):
  dfsNum[w]:=dfsPos; dfsPos:=dfsPos+1
- traverseNonTreeEdge(v,w):
  -
- Backtrack(u,v):
  finishTime[v]:=finishingTime; finishingTime:=finishingTime+1

DFS-Nummerierung

- Exploriere Graph in die Tiefe
  (: aktuell, : noch aktiv, : fertig)
- Paare (i,j): i: dfsNum, j: finishTime



DFS-Nummerierung

Ordnung $<$ auf den Knoten:

$u<v$, $dfsNum[u]<dfsNum[v]$

Lemma 7.8: Die Knoten im DFS-Rekursionsstack (alle 🔴 Knoten) sind sortiert bezüglich $<$.

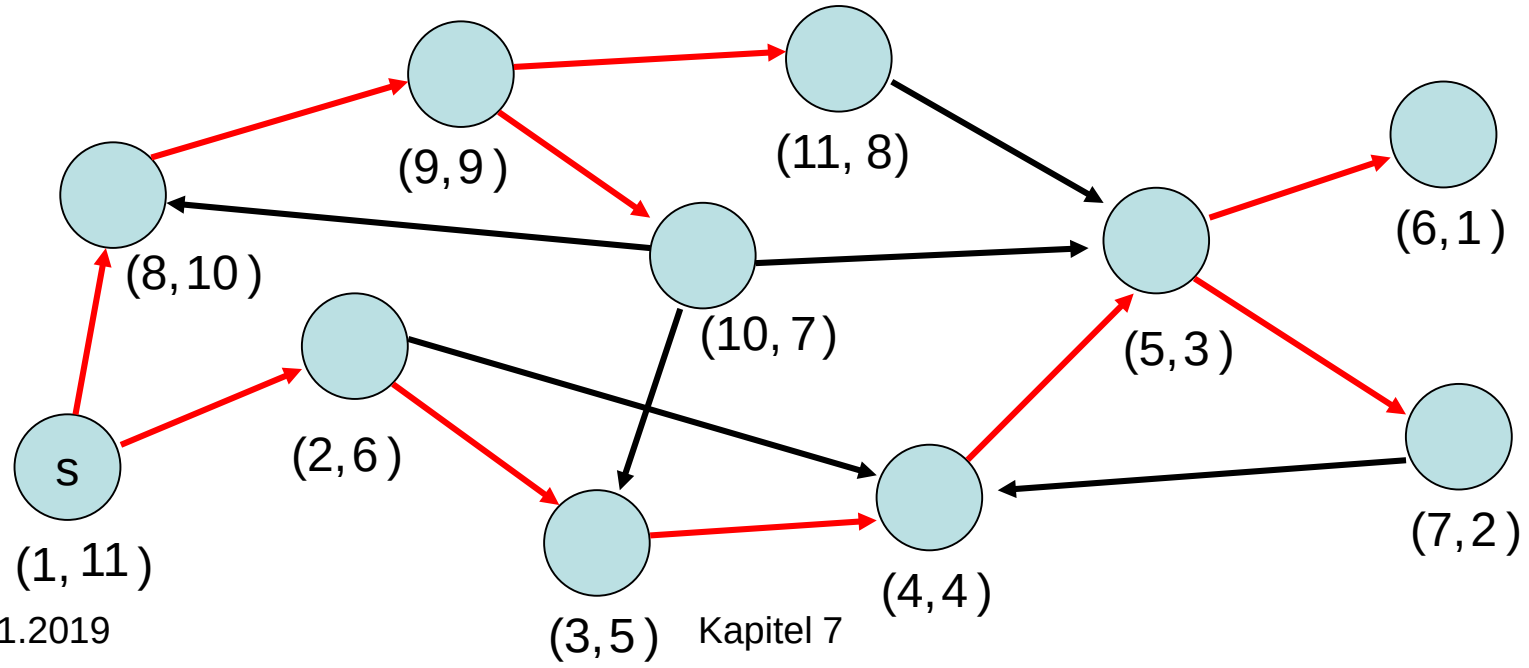
Beweis:

dfsPos wird nach jeder Zuweisung von dfsNum erhöht. Jeder neue aktive Knoten hat also immer die höchste dfsNum.

DFS-Nummerierung

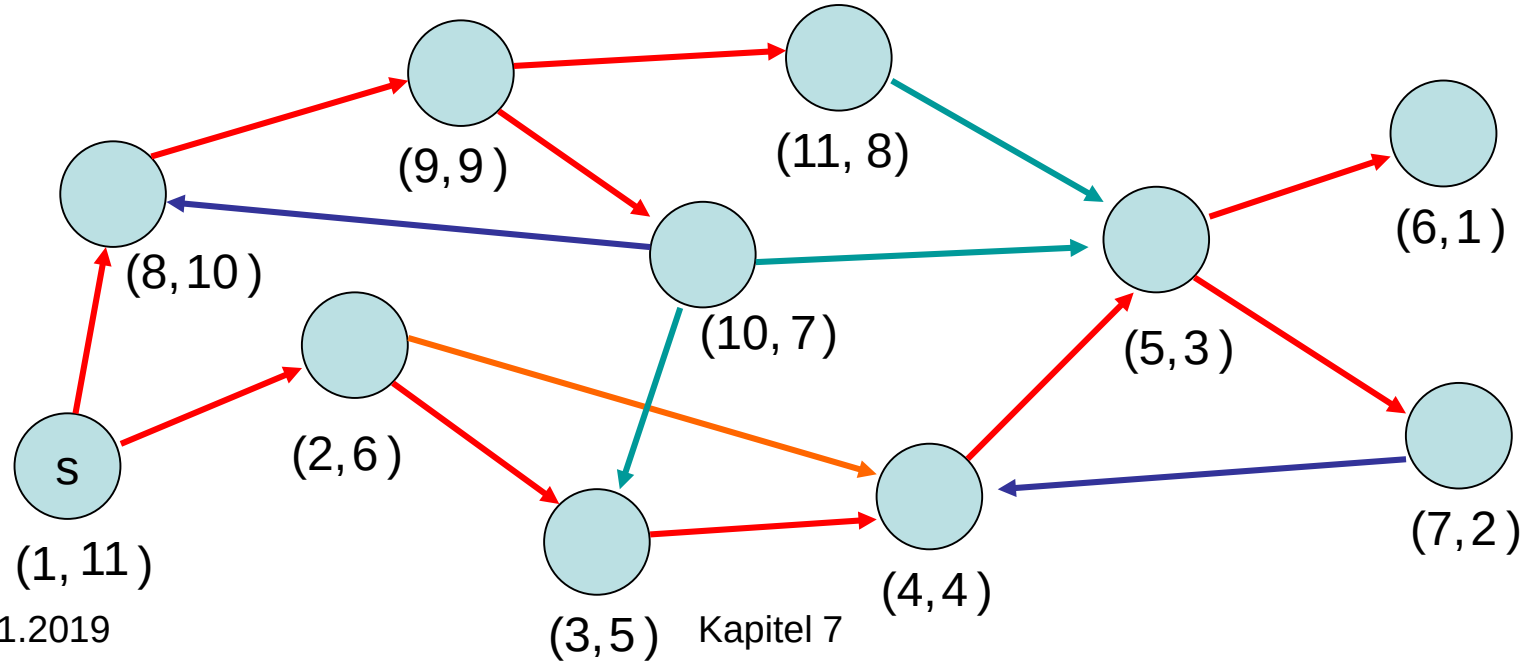
Überprüfung von Lemma 7.8:

- Rekursionsstack: roter Pfad von s
- Paare (i,j): i: dfsNum, j: finishTime



DFS-Nummerierung

- Baumkante: zum Kind
- Vorwärtskante: zu einem Nachkommen
- Rückwärtskante: zu einem Vorfahr
- Kreuzkante: alle sonstige Kanten



DFS-Nummerierung

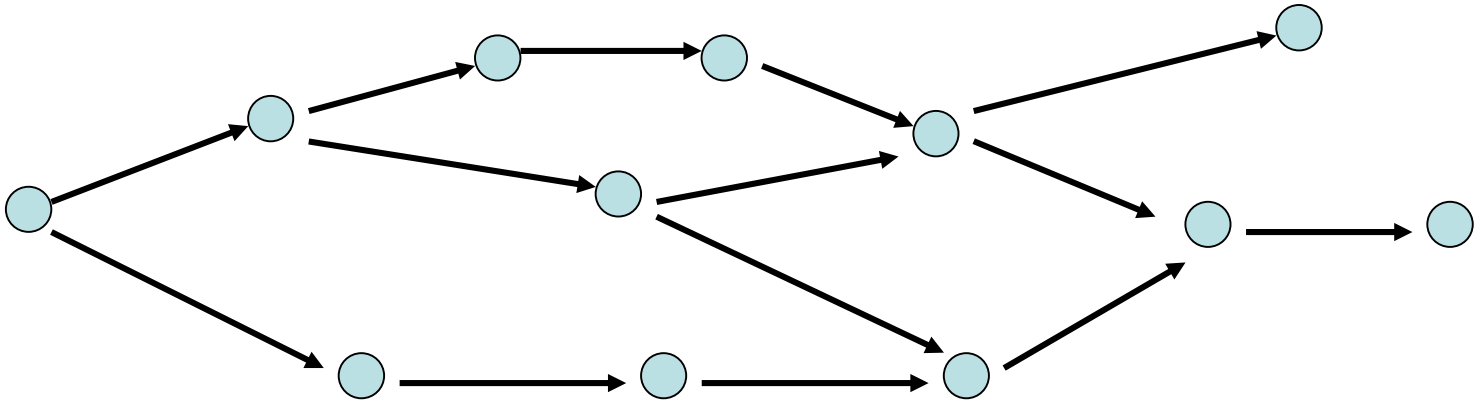
Beobachtung für Kante (v,w):

Kantentyp	dfsNum[v]< dfsNum[w]	finishTime[v]> finishTime[w]
Baum & Vorwärts	Ja	Ja
Rückwärts	Nein	Nein
Kreuz	Nein	Ja

DFS-Nummerierung

Anwendung:

- Erkennung eines azyklischen gerichteten Graphen (engl. DAG)



Merkmal: keine gerichtete Kreise

DFS-Nummerierung

Lemma 7.9: Das Folgende ist äquivalent:

1. G ist ein DAG
2. DFS enthält keine Rückwärtskante
3. $\forall(v,w)\in E: finishTime[v]>finishTime[w]$

Beweis:

2. , 3.: folgt aus Tabelle

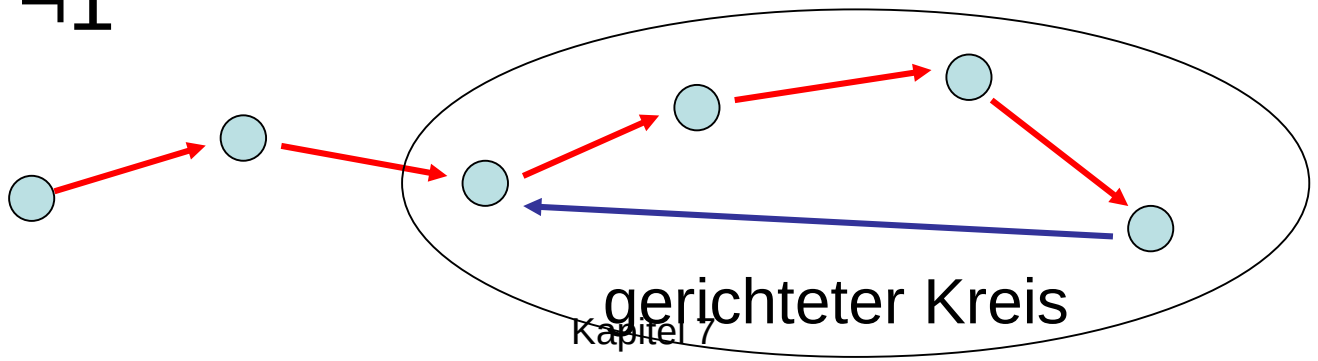
DFS-Nummerierung

Lemma 7.9: Das Folgende ist äquivalent:

1. G ist ein DAG
2. DFS enthält keine Rückwärtskante
3. $\forall(v,w)\in E$: finishTime[v]>finishTime[w]

Beweis:

$\neg 2 \Rightarrow \neg 1$



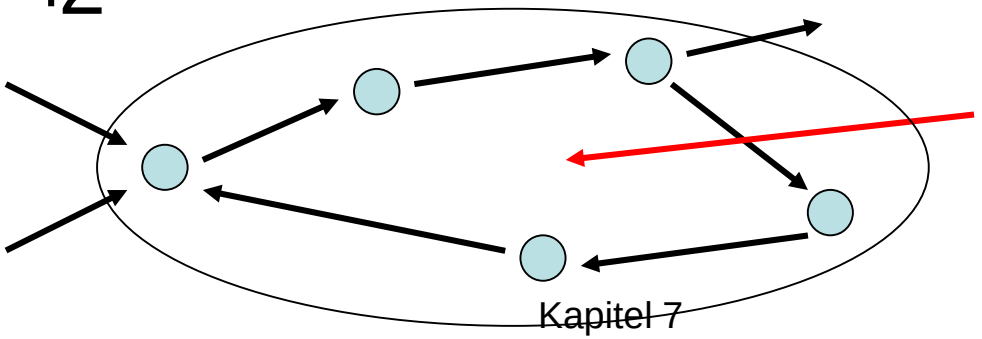
DFS-Nummerierung

Lemma 7.9: Das Folgende ist äquivalent:

1. G ist ein DAG
2. DFS enthält keine Rückwärtskante
3. $\forall(v,w)\in E$: finishTime[v]>finishTime[w]

Beweis:

¬1 ⇒ ¬2



Eine davon Rückwärtskante

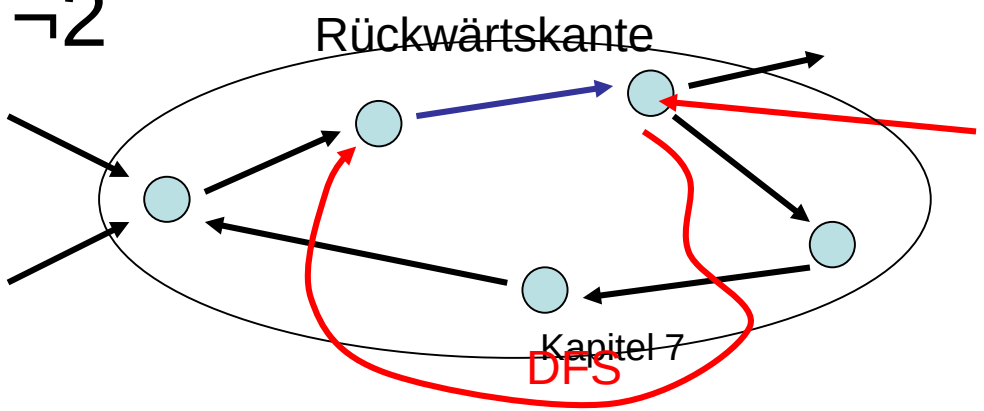
DFS-Nummerierung

Lemma 7.9: Das Folgende ist äquivalent:

1. G ist ein DAG
2. DFS enthält keine Rückwärtskante
3. $\forall(v,w)\in E$: finishTime[v]>finishTime[w]

Beweis:

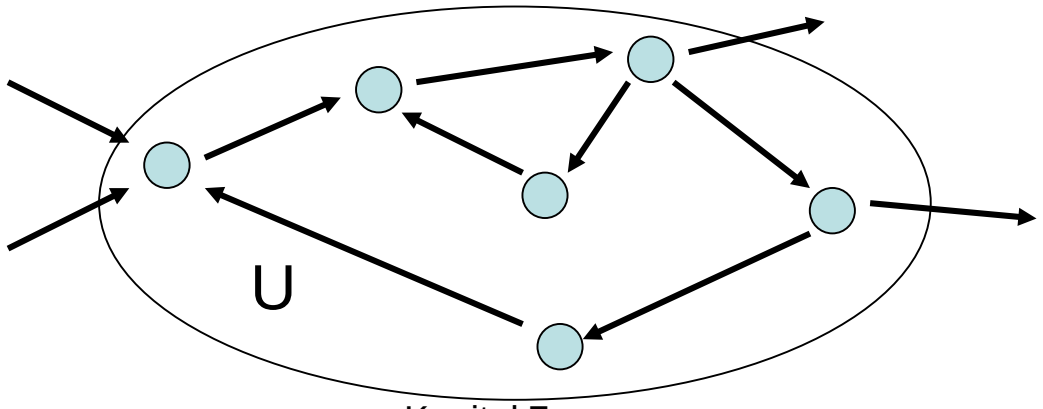
¬1 ⇒ ¬2



Annahme: Erster von DFS besuchter Knoten im Kreis

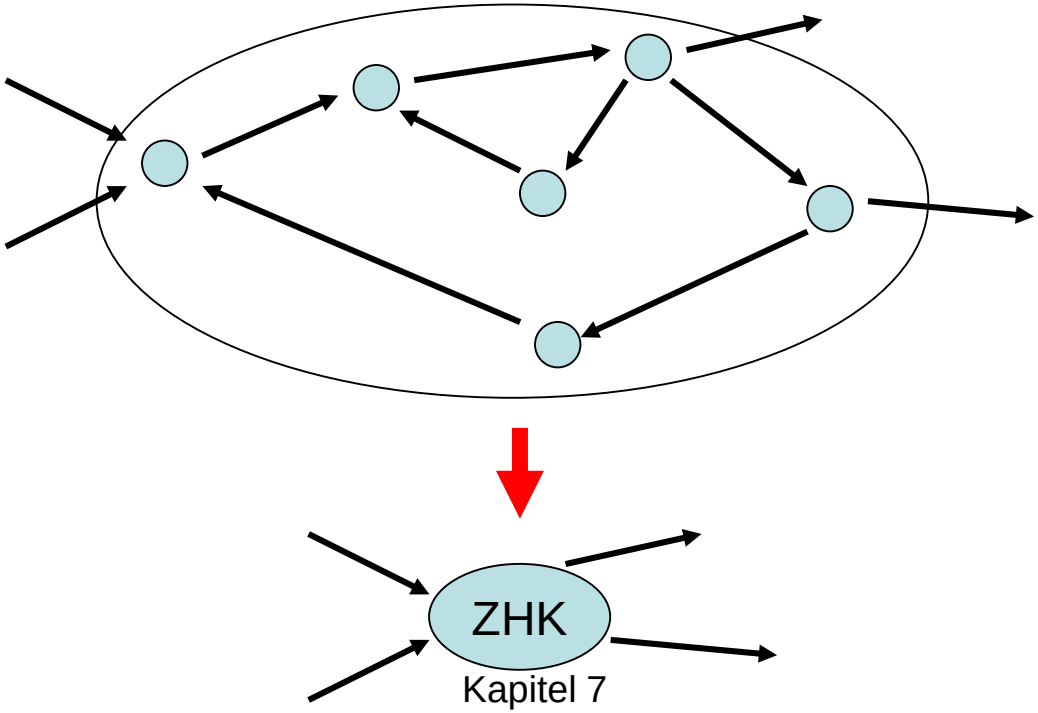
Starke ZHKs

Erinnerung: Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph. $U \subseteq V$ ist eine starke Zusammenhangskomponente (ZHK) von V , falls es für alle $u,v \in U$ einen gerichteten Weg von u nach v in G gibt und U maximal ist

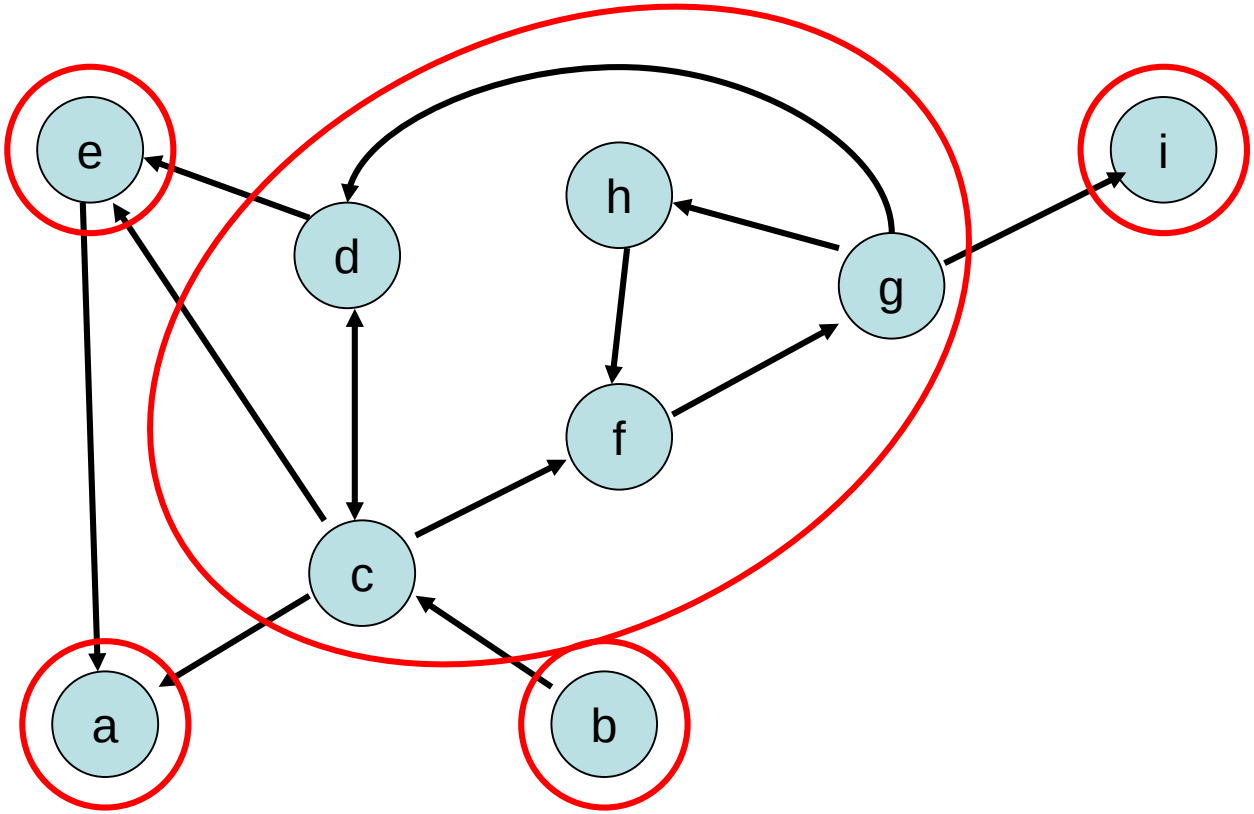


Starke ZHKs

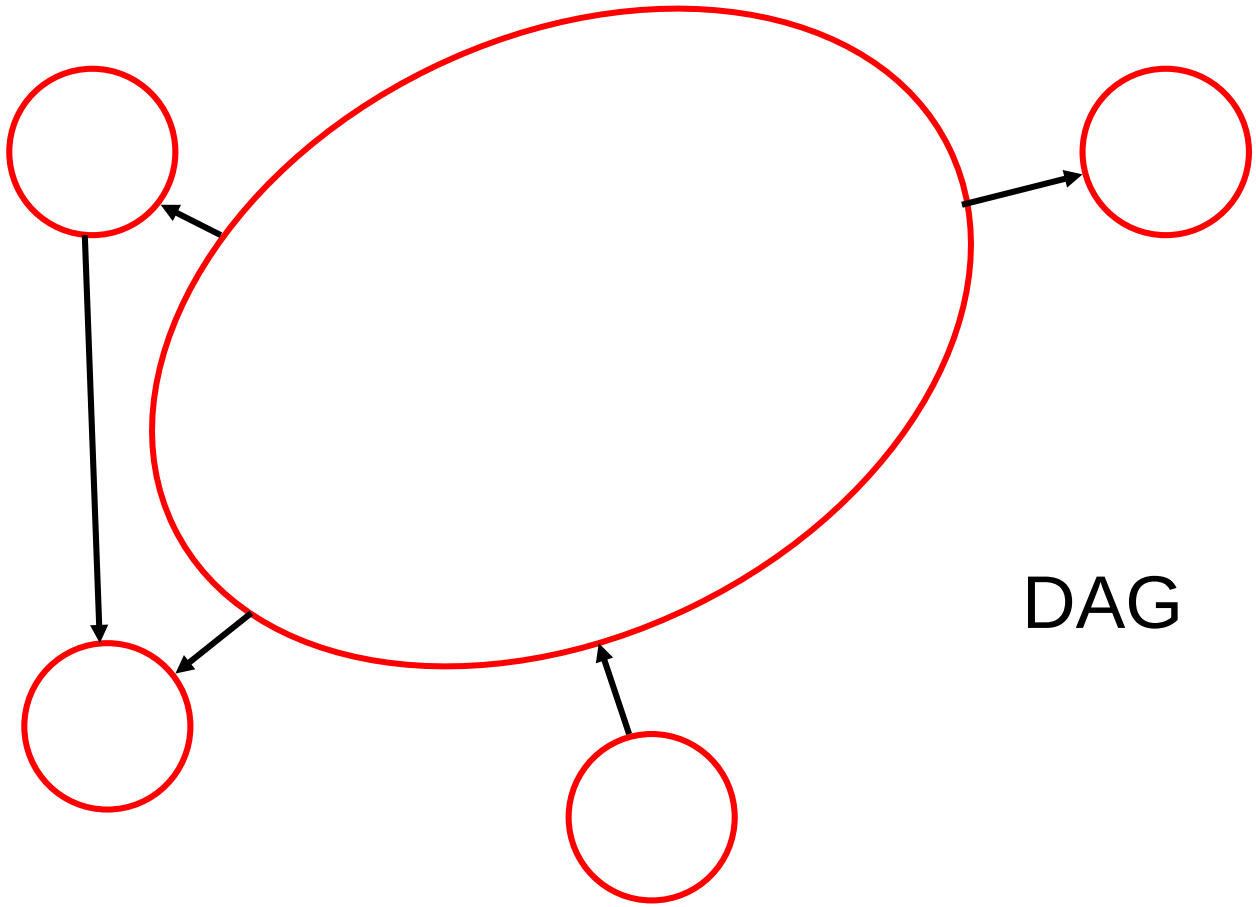
Beobachtung: Schrumpft man starke ZHKs zu einzelnen Knoten, dann ergibt sich DAG.



Starke ZHKs - Beispiel



Starke ZHKs - Beispiel



DAG

Starke ZHKs

Ziel: Finde alle starken ZHKs im Graphen in $O(n+m)$ Zeit (n: #Knoten, m: #Kanten)

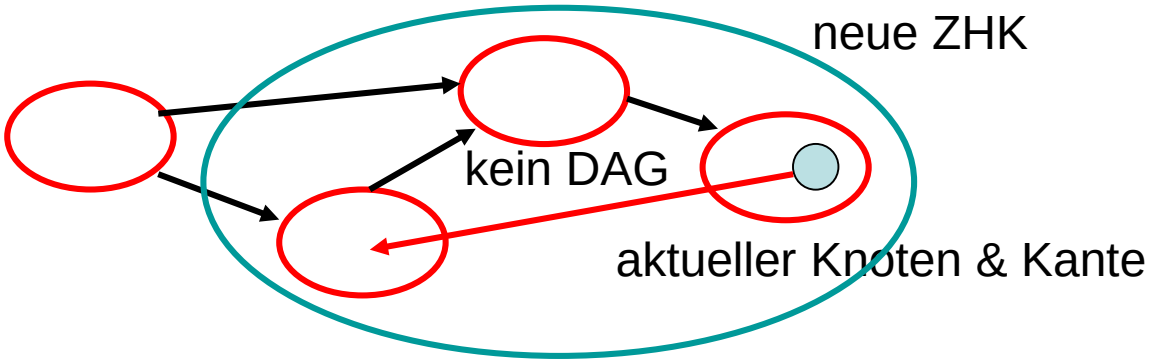
Strategie: Verwende DFS-Verfahren mit
component: Array [1..n] of 1..n

Am Ende: component[v]=component[w] ,
v und w sind in derselben starken ZHK

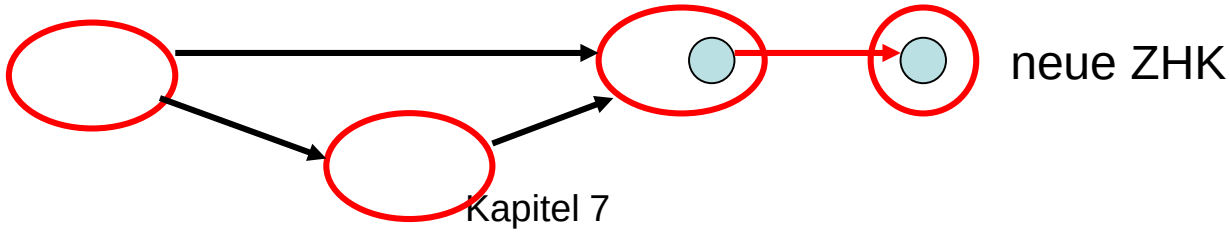
Starke ZHKs

- Betrachte DFS auf $G=(V,E)$
- Sei $G_c=(V_c,E_c)$ bereits besuchter Teilgraph von G
- Ziel: bewahre starke ZHKs in G_c
- Idee:

a)

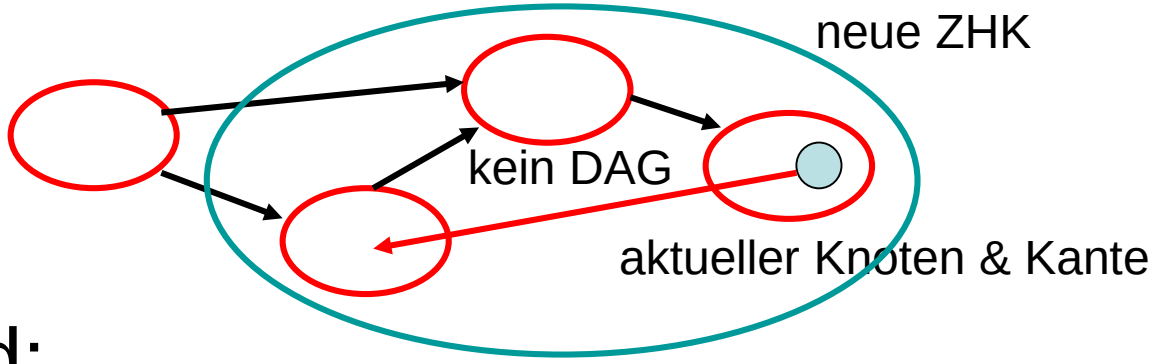


b)

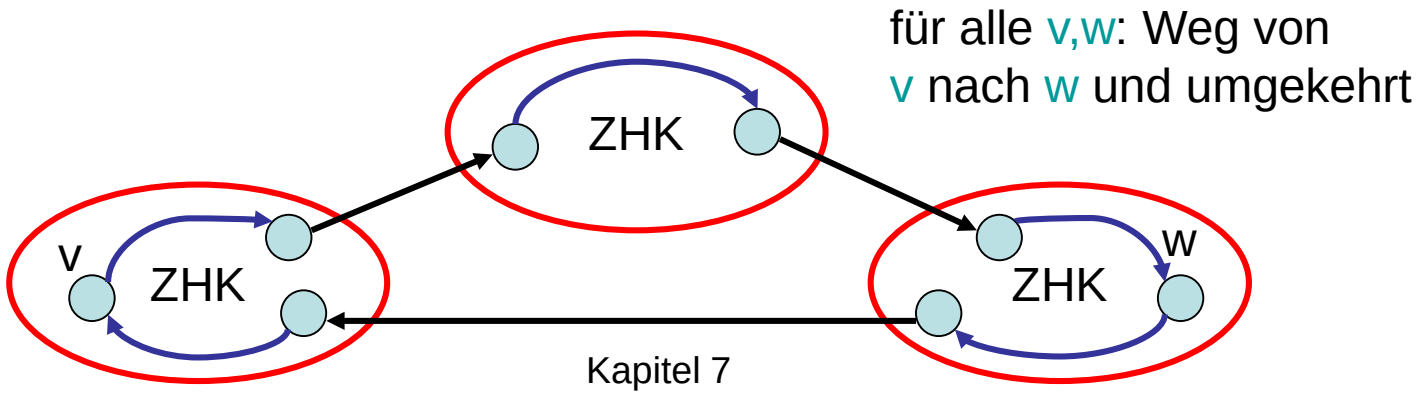


Starke ZHKs

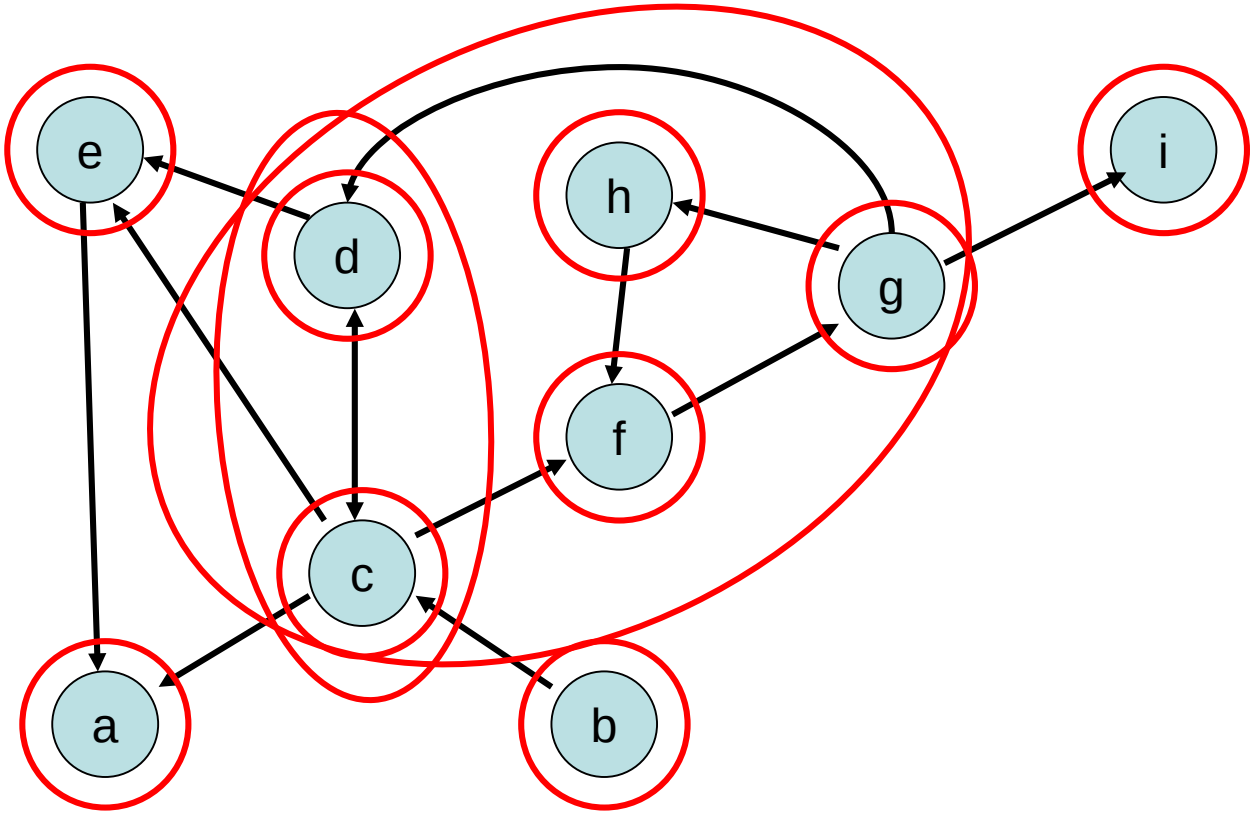
Warum ZHKs zu einer zusammenfassbar?



Grund:



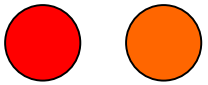
Starke SHKs - Beispiel



Problem: wie fasst man ZHKs effizient zusammen?

Starke ZHKs

Definition:

-  : unfertiger Knoten
-  : fertiger Knoten
- Eine ZHK in G heißt offen, falls sie noch unfertige Knoten enthält. Sonst heißt sie (und ihre Knoten) geschlossen.
- Repräsentant einer ZHK: Knoten mit kleinster dfsNum.

Starke ZHKs

Beobachtungen:

1. Alle Kanten aus geschlossenen Knoten führen zu geschlossenen Knoten.
2. Der Pfad zum aktuellen Knoten enthält die Repräsentanten aller offenen ZHKs.
3. Betrachte die Knoten in offenen ZHKs sortiert nach DFS-Nummern. Die Repräsentanten partitionieren diese Folge in die offenen ZHKs.

Starke ZHKs

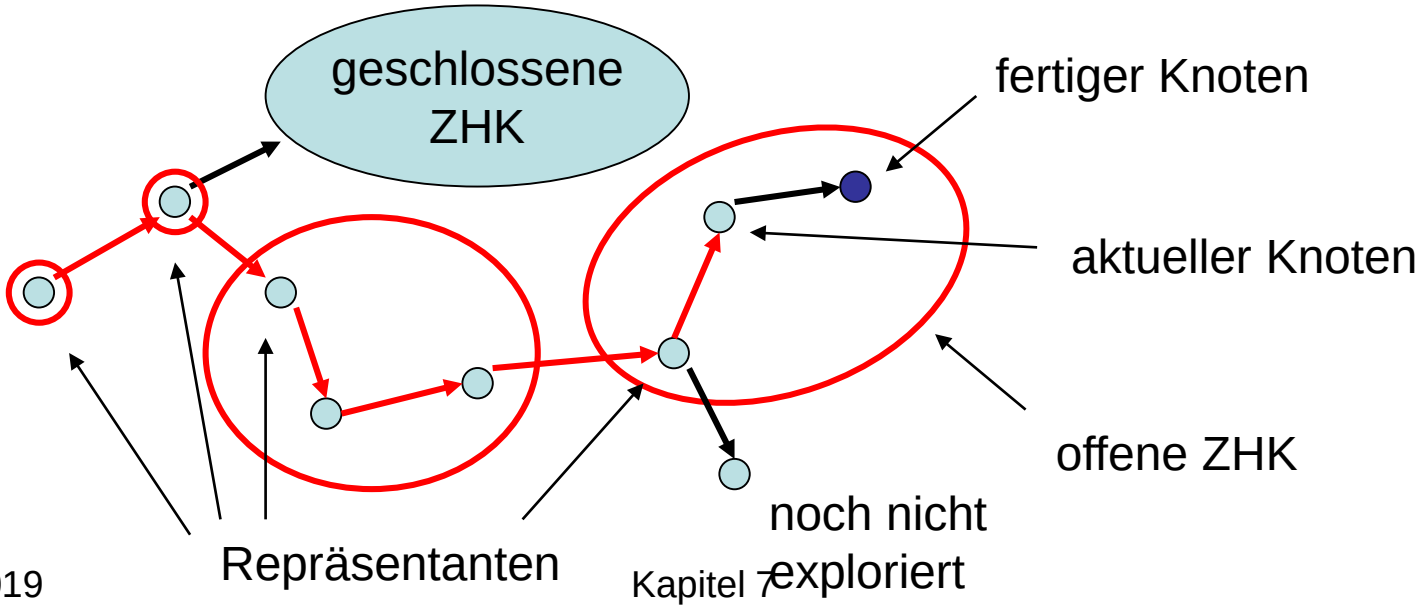
Beobachtungen sind Invarianten:

1. Alle Kanten aus geschlossenen Knoten führen zu geschlossenen Knoten.
2. Der Pfad zum aktuellen Knoten enthält die Repräsentanten aller offenen ZHKs.
3. Betrachte die Knoten in offenen ZHKs sortiert nach DFS-Nummern. Die Repräsentanten partitionieren diese Folge in die offenen ZHKs.

Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

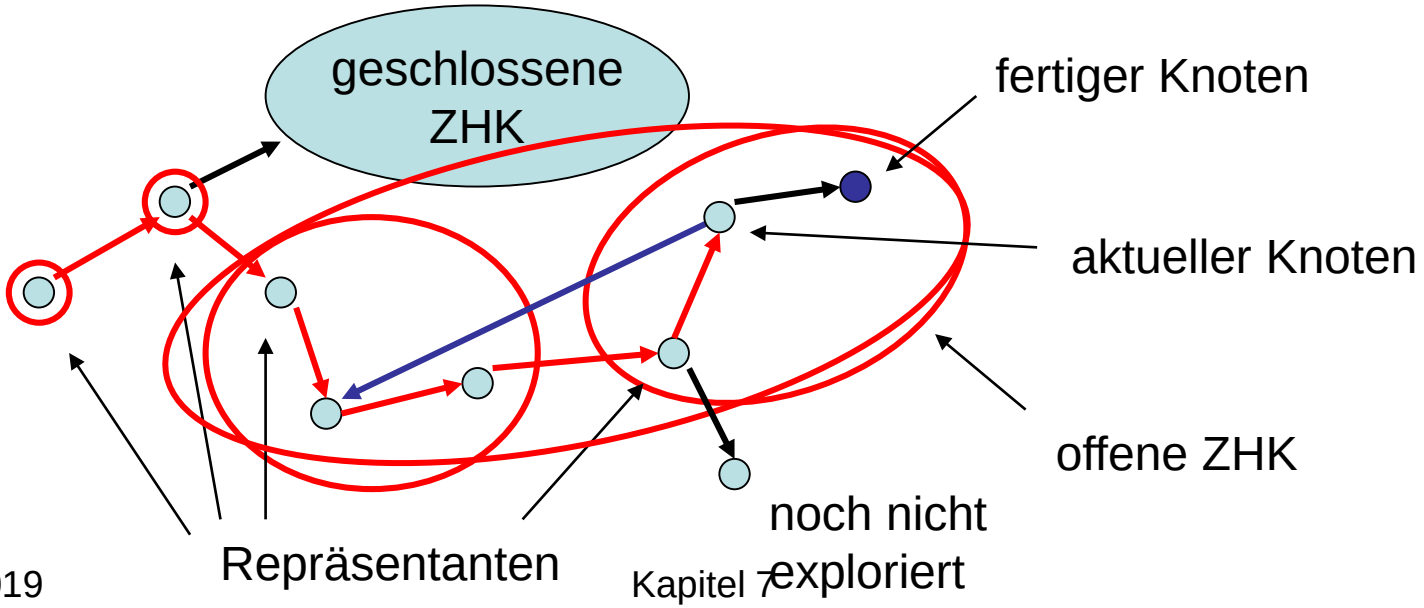
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Wir betrachten verschiedene Fälle



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

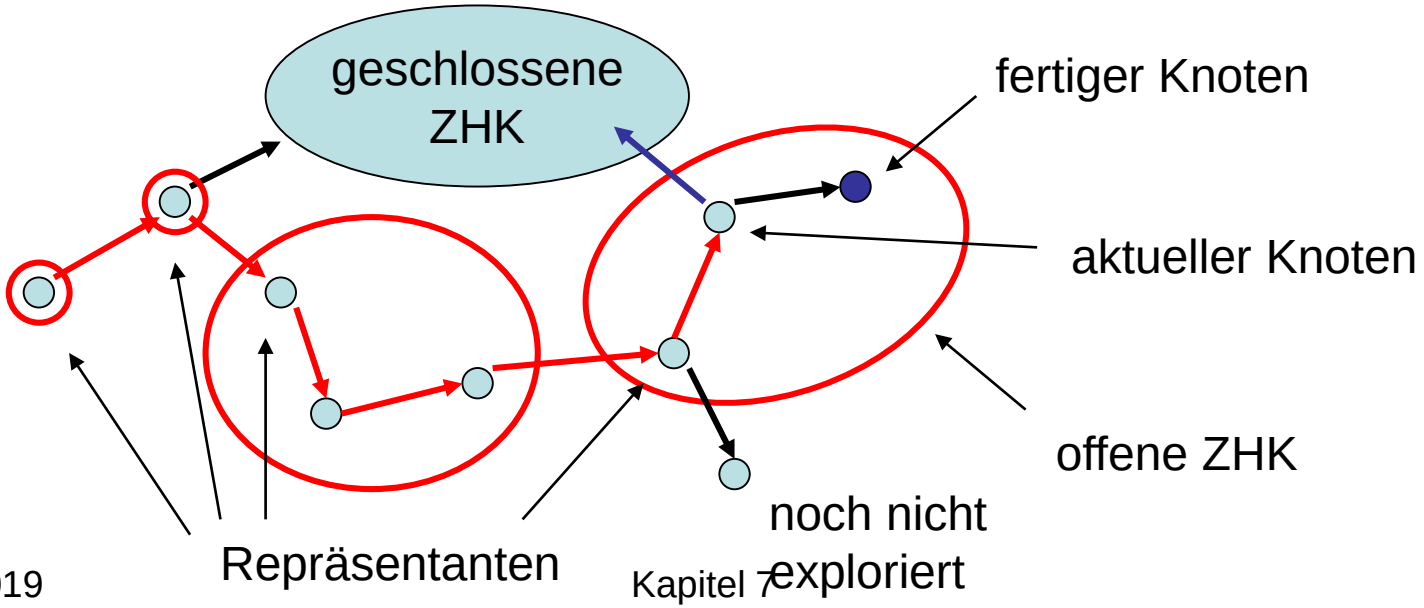
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 1: Kante zu unfertigem Knoten



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

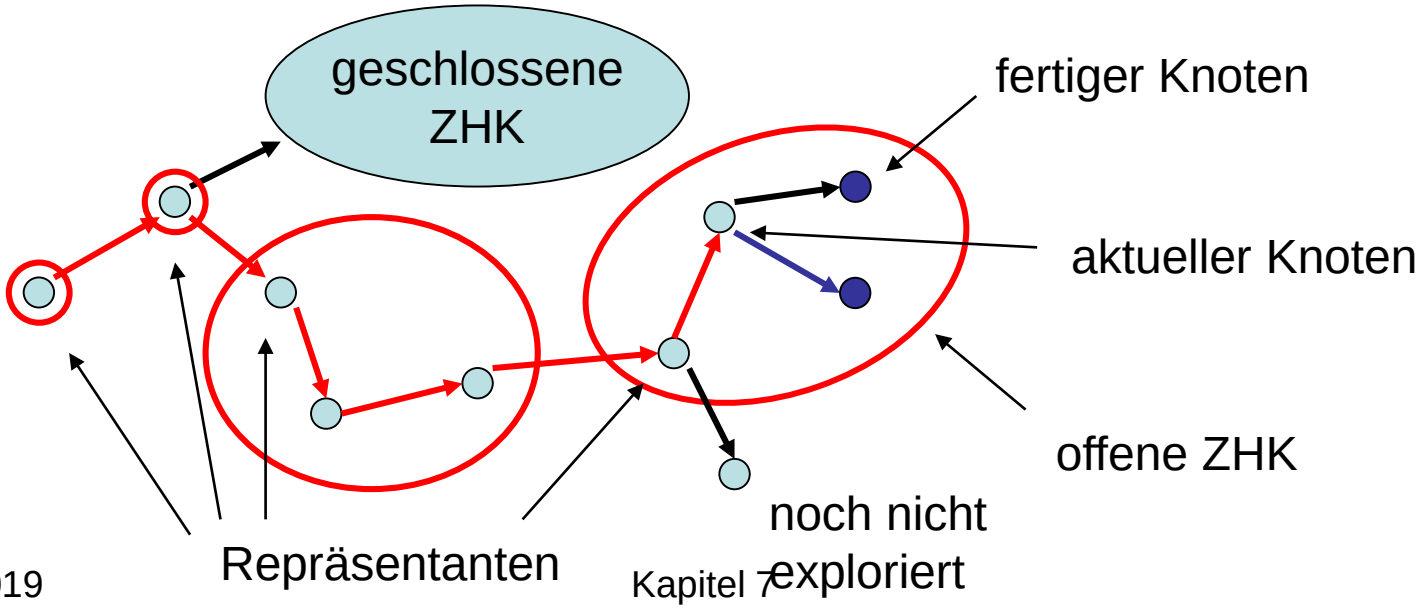
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 2: Kante zu geschlossenem Knoten



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

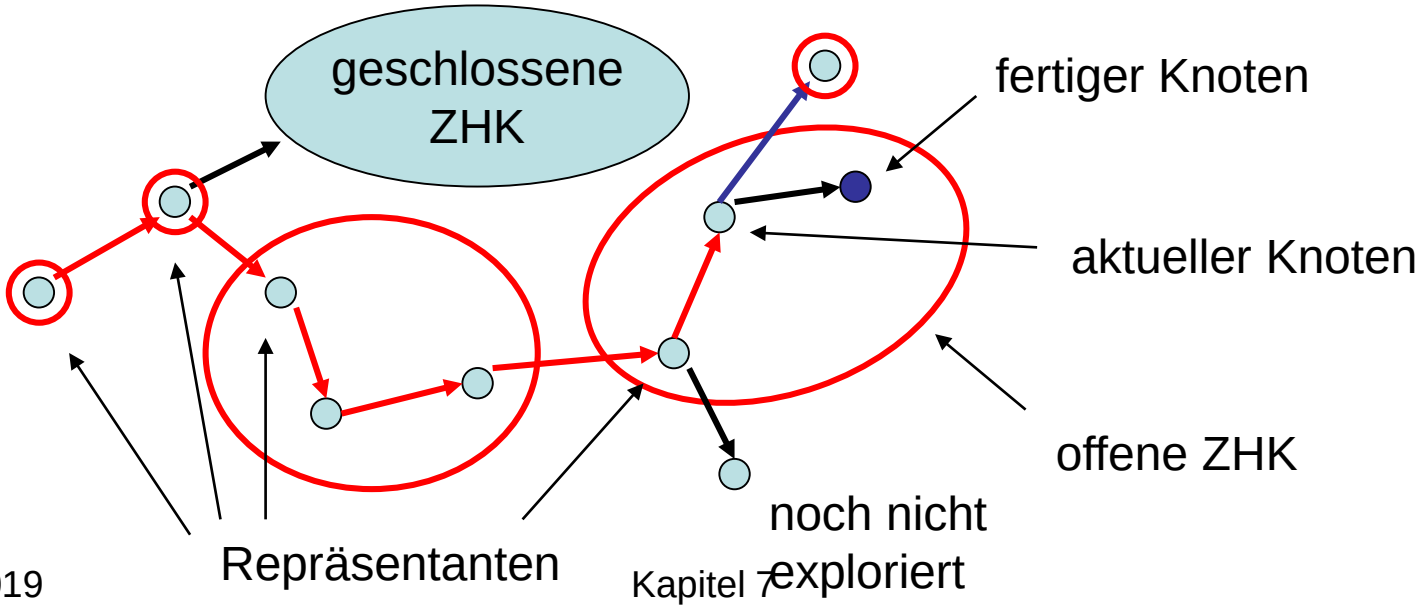
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 3: Kante zu fertigem Knoten



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

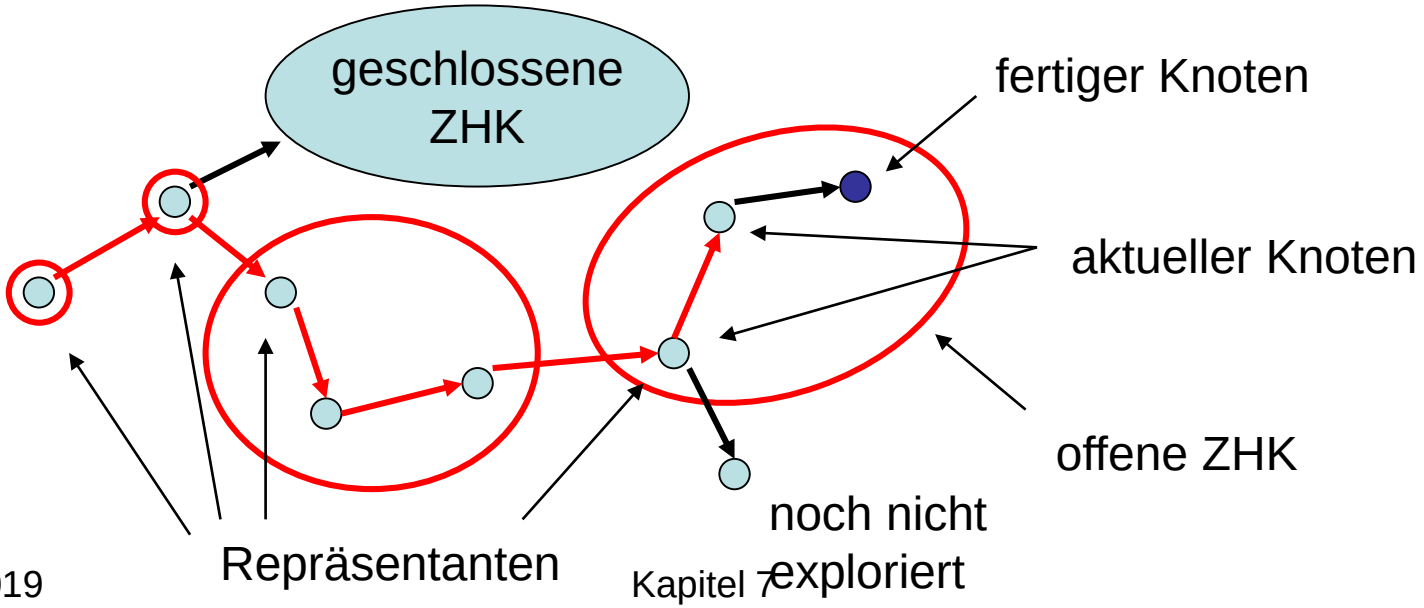
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 4: Kante zu nicht exploriertem Knoten



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

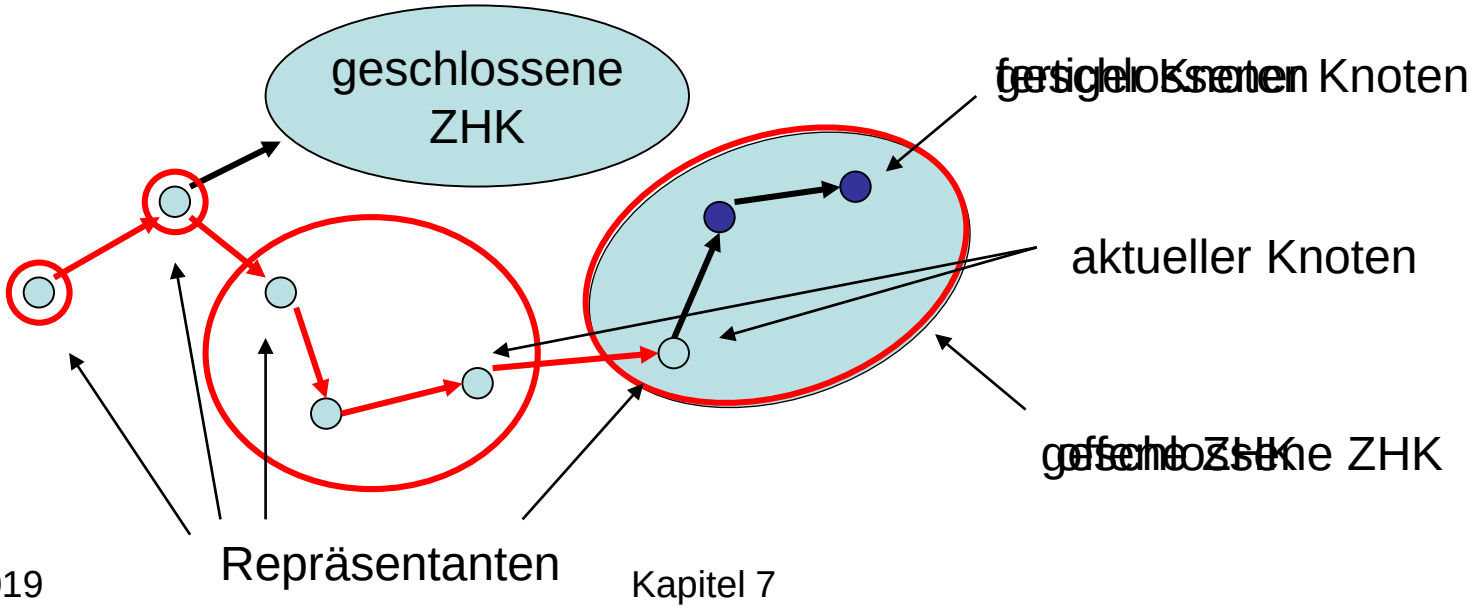
- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 5: Knoten exploriert



Starke ZHKs

Beweis über vollständige Induktion.

- Anfangs gelten alle Invarianten
- Fall 5: Knoten exploriert



Starke ZHKs

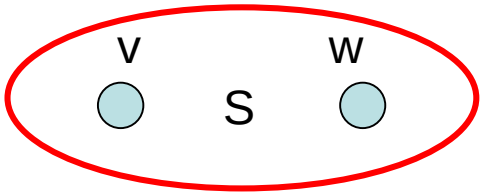
Lemma 7.10: Eine geschlossene ZHK in G_c ist eine ZHK in G.

Beweis:

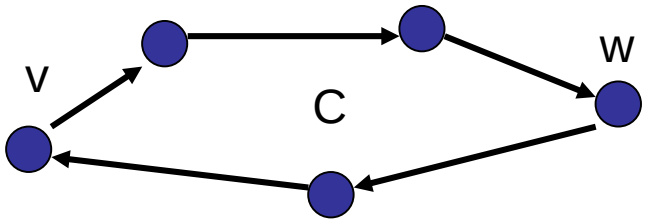
- v: geschlossener Knoten
- S: ZHK in G, die v enthält
- S_c: ZHK in G_c, die v enthält
- Es gilt: $S_c \subseteq S$
- Zu zeigen: $S \subseteq S_c$

Starke ZHKs

Beweis von Lemma 7.10:



- w: beliebiger Knoten in S
- Es gibt gerichteten Kreis C durch v und w
- Invariante 1: alle Knoten in C geschlossen

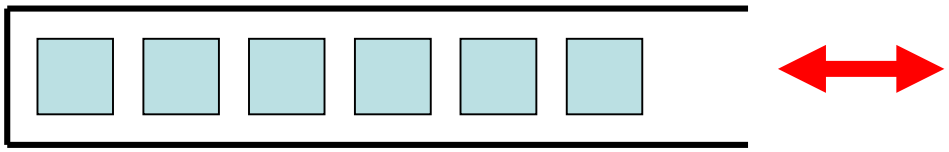


- Da alle Kanten geschlossener Knoten exploriert worden sind, ist C in G_c und daher $w \in S_c$

Starke ZHKs

Invarianten 2 und 3: einfache Methode, um offene ZHKs in G_c zu repräsentieren:

- Wir verwalten Folge oNodes aller offenen (nicht geschl.) Knoten in steigender DFS-Nummer und eine Teilfolge oReps aller offenen ZHK-Repräsentanten
- Stack ausreichend für beide Folgen



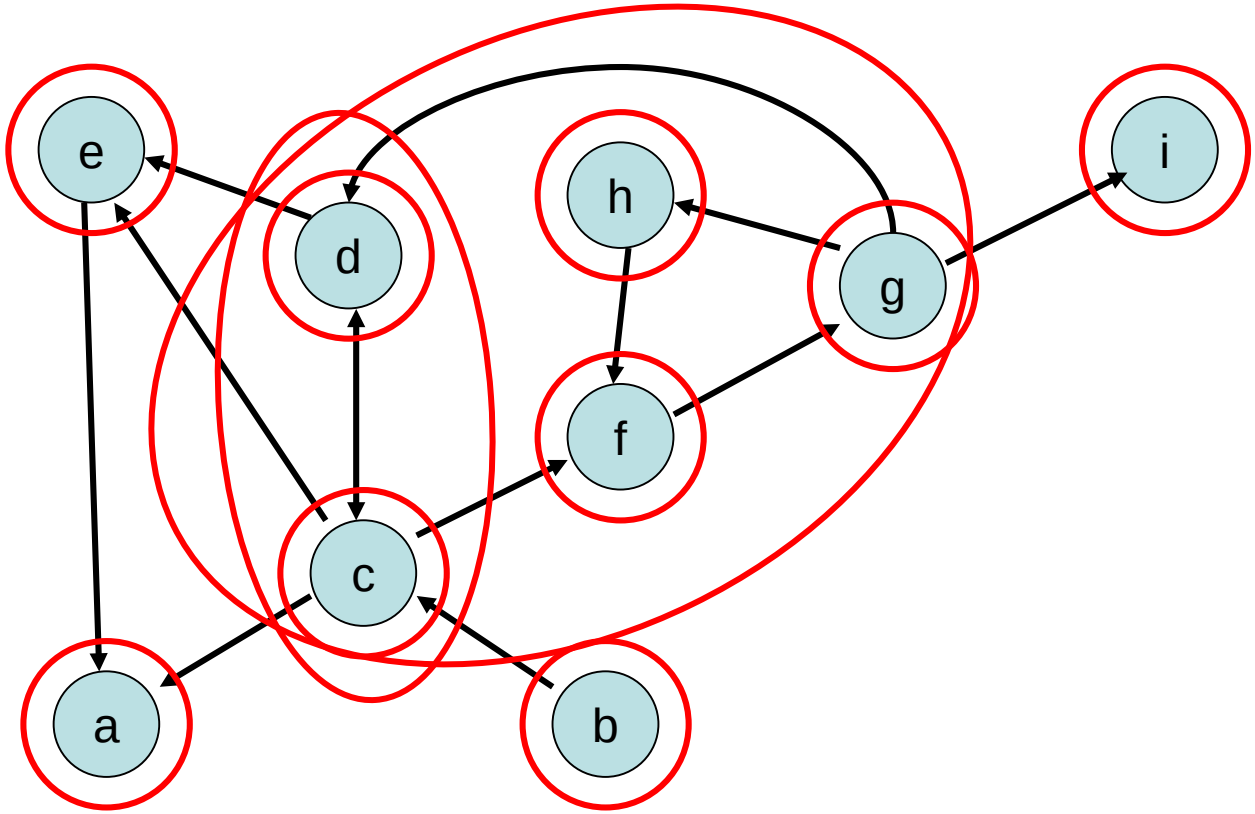
Starke ZHKs

```
init:
   component: Array [1..n] of NodeId
   oReps = <>: Stack of NodeId
   oNodes = <>: Stack of NodeId
   dfsPos:=1

root(w) oder traverseTreeEdge(v,w):
   oReps.push(w)     // neue ZHK
   oNodes.push(w)    // neuer offener Knoten
   dfsNum[w]:=dfsPos; dfsPos:=dfsPos+1
```

Starke ZHKs

```
traverseNonTreeEdge(v,w):
   if w∈oNodes then  // kombiniere ZHKs
      while dfsNum[w] < dfsNum[oReps.top()] do
         oReps.pop()

backtrack(u,v):
   if v = oReps.top() then  // v Repräsentant?
      oReps.pop()  // ja: entferne v
      repeat              // und offene Knoten bis v
         w:=oNodes.pop()
         component[w]:=v
      until w=v
```

Starke SHKs - Beispiel



oNodes: | b | c | d | f | g | h | i |

oReps: | b | c | i | g |

Starke ZHKs

Satz 7.11: Der DFS-basierte Algorithmus für starke ZHKs benötigt O(n+m) Zeit.

Beweis:

- init, root, traverseTreeEdge: Zeit O(1)
- Backtrack, traverseNonTreeEdge: da jeder Knoten nur höchstens einmal in oReps und oNodes landet, insgesamt Zeit O(n)
- DFS-Gerüst: Zeit O(n+m)

Probleme

- 10004: Bicoloring
- 10067: Playing with Wheels
- 10099: The Tourist Guide
- 117: The Postal Worker Rings Once
- 125: Numbering Paths
- 192: Synchronous Design

Hausaufgabe:

- 10199: Tourist Guide