Proseminar
Effiziente Algorithmen

Kapitel 2: Datenstrukturen

Prof. Dr. Christian Scheideler

WS 2022

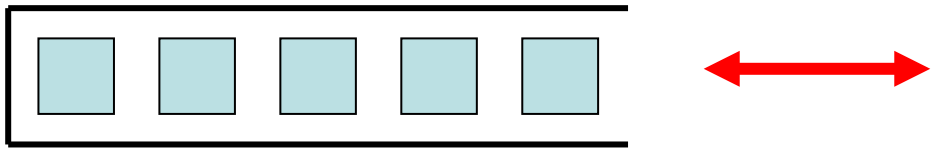
Übersicht

- Stacks
- Queues
- Suchbäume
- Hashtabellen
- Priority Queues
- Mengen
- Probleme im Bereich Datenstrukturen

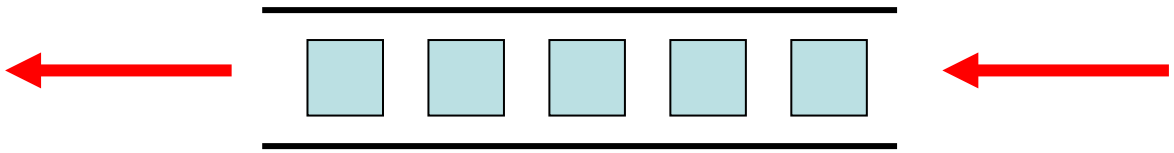
Stacks (Stapel) und Queues (Schlangen)

Definition:

1. Stacks (Stapel) sind eine Datenstruktur, die die LIFO (last-in-first-out) Regel implementiert.
   Bei der LIFO Regel soll das zuletzt eingefügte Objekt entfernt werden.



2. Queues (Schlangen) sind eine Datenstruktur, die die FIFO (first-in-first-out) Regel implementiert.
   Bei der FIFO Regel soll das am längsten in der Menge befindliche Objekt entfernt werden.



Stacks

- Einfügen eines Objekts wird bei Stacks Push genannt.
- Entfernen des zuletzt eingefügten Objekts wird Pop genannt.
- Zusätzliche Hilfsoperation ist Stack-Empty, die überprüft, ob ein Stack leer ist.
- Stack mit maximal n Objekten wird realisiert durch ein Array $S[1 \ldots n]$ mit einer zusätzlichen Variablen $top[S]$, die den Index des zuletzt eingefügten Objekts speichert.
- Maximale Anzahl Objekte a priori nicht bekannt: verwende dynamisches Array für S.

Queues

- Einfügen eines Objekts wird Enqueue genannt.
- Entfernen des am längsten in der Queue befindlichen Objekts wird Dequeue genannt.
- Zusätzliche Hilfsoperation ist Queue-Empty, die überprüft, ob eine Queue leer ist.
- Queue mit maximal *n-1* Objekten wird realisiert durch ein Feld *Q*[*1…n*] mit zusätzlichen Variablen *head*[*Q*], *tail*[*Q*]. (Maximum nicht bekannt: verwende dynamisches Feld.)
- *head*[*Q*]: Position des am längsten in Queue befindlichen Objekts
- *tail*[*Q*]: erste freie Position.
- Alle Indexberechnungen modulo *n* (+1), betrachten Array kreisförmig. Auf Position *n* folgt wieder Position 1.

Binäre Suchbäume

- Verwende Binärbaum
- Speichere Schlüssel „geordnet“

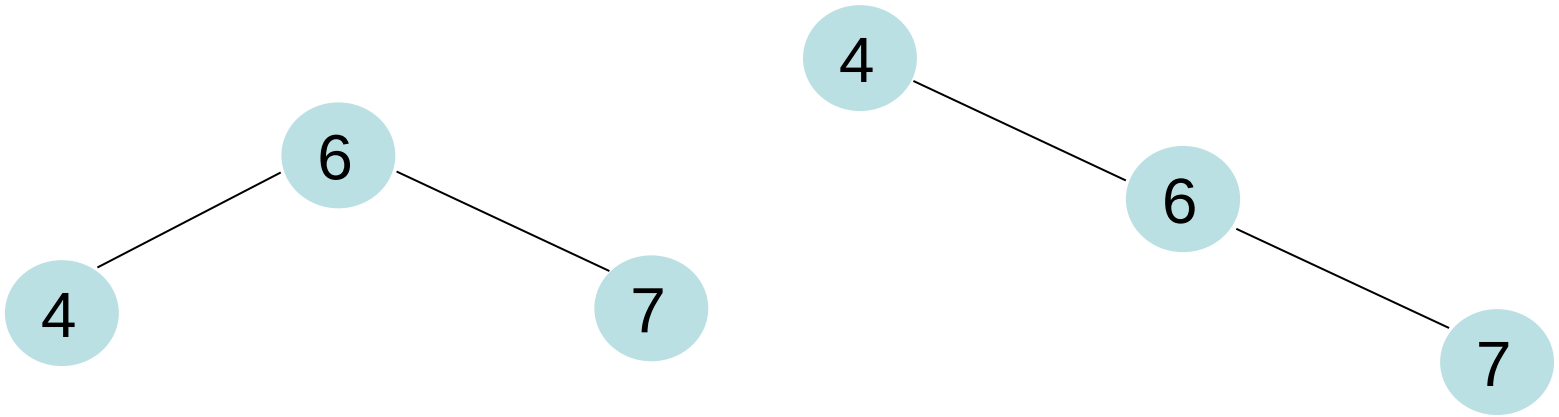
Binäre Suchbaumeigenschaft:

- Sei x Knoten im binären Suchbaum
- Ist y Knoten im linken Unterbaum von x, dann gilt $key[y] \leq key[x]$
- Ist y Knoten im rechten Unterbaum von x, dann gilt $key[y] \geq key[x]$

Binäre Suchbäume

Unterschiedliche Suchbäume

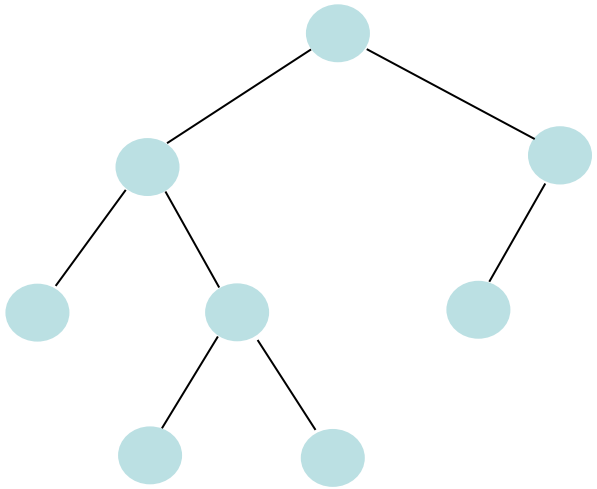
- Beispiel: Schlüsselmenge 4,6,7



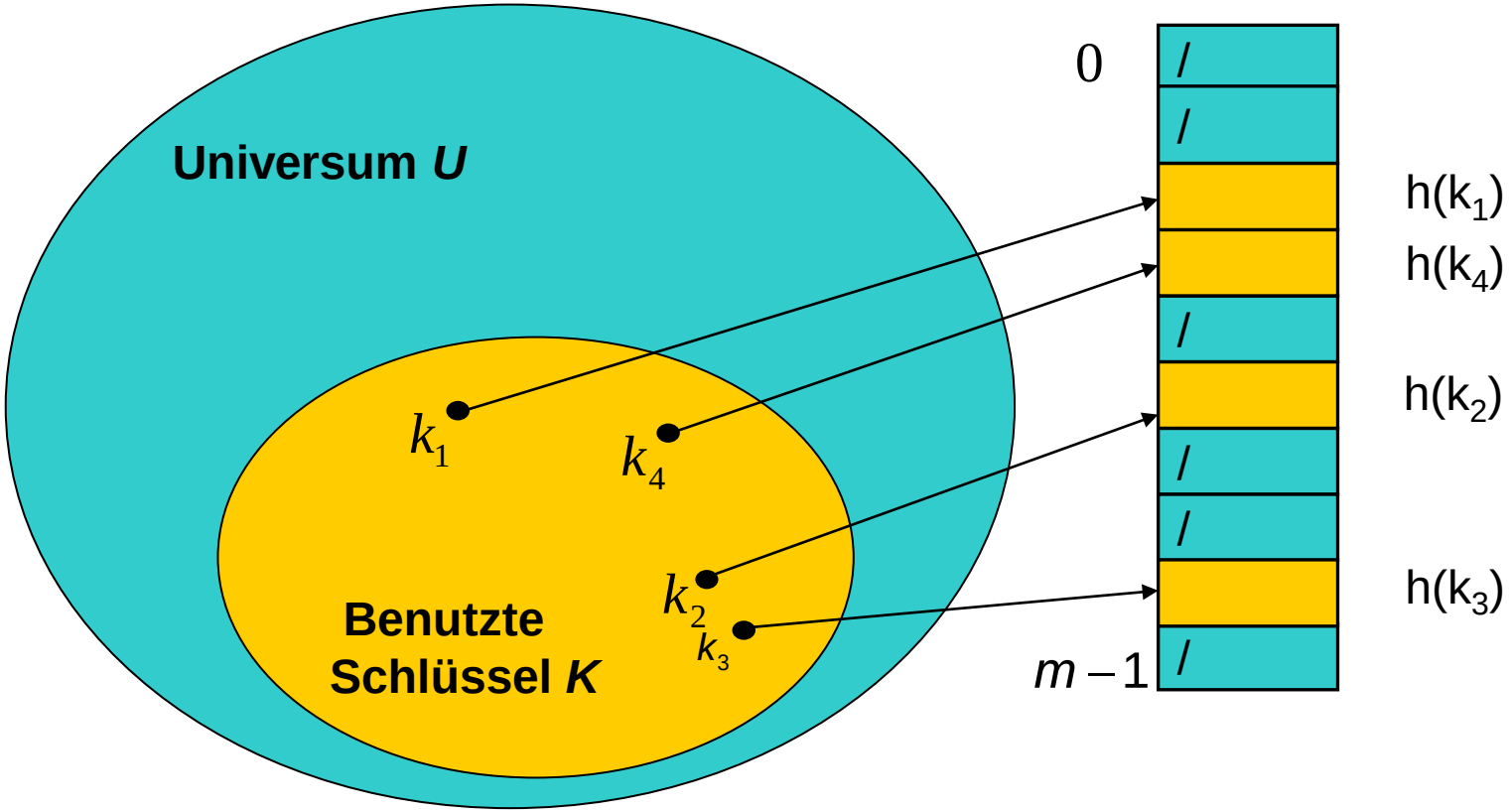
Balancierte binäre Suchbäume

AVL-Bäume

- Ein Baum heißt AVL-Baum, wenn für jeden Knoten gilt: Die Höhe seines linken und rechten Teilbaums unterscheidet sich höchstens um 1.



Hashing (ohne Kollisionen)

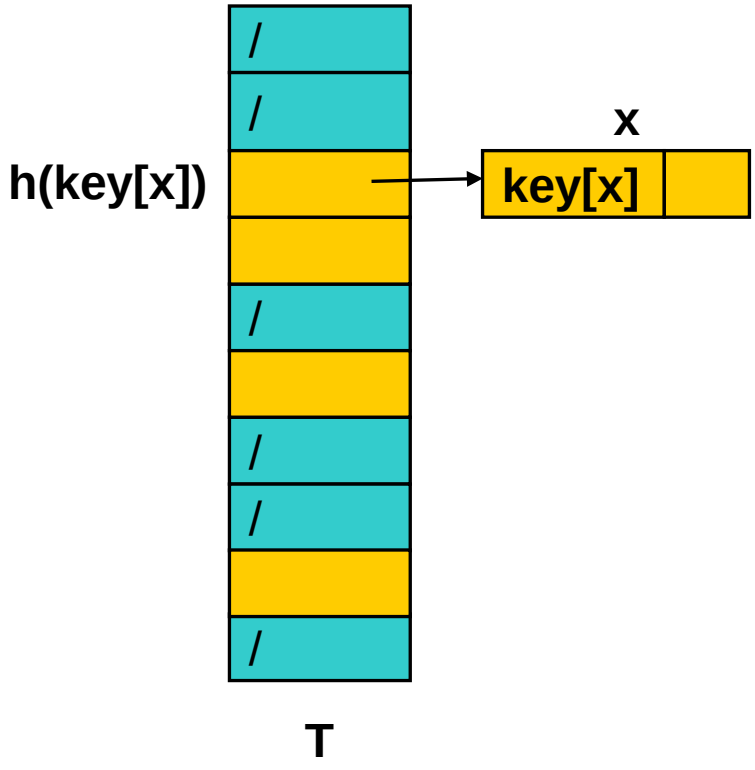


Hashing (ohne Kollisionen)

```
Insert(T,x):
    T[h(key[x])] ← x

Remove(T,k):
    if key[T[h(k)]]=k then
        T[h(k)] ← NIL

Search(T,k):
    if key[T[h(k)]]=k then
        return T[h(k)]
    else
        return NIL
```

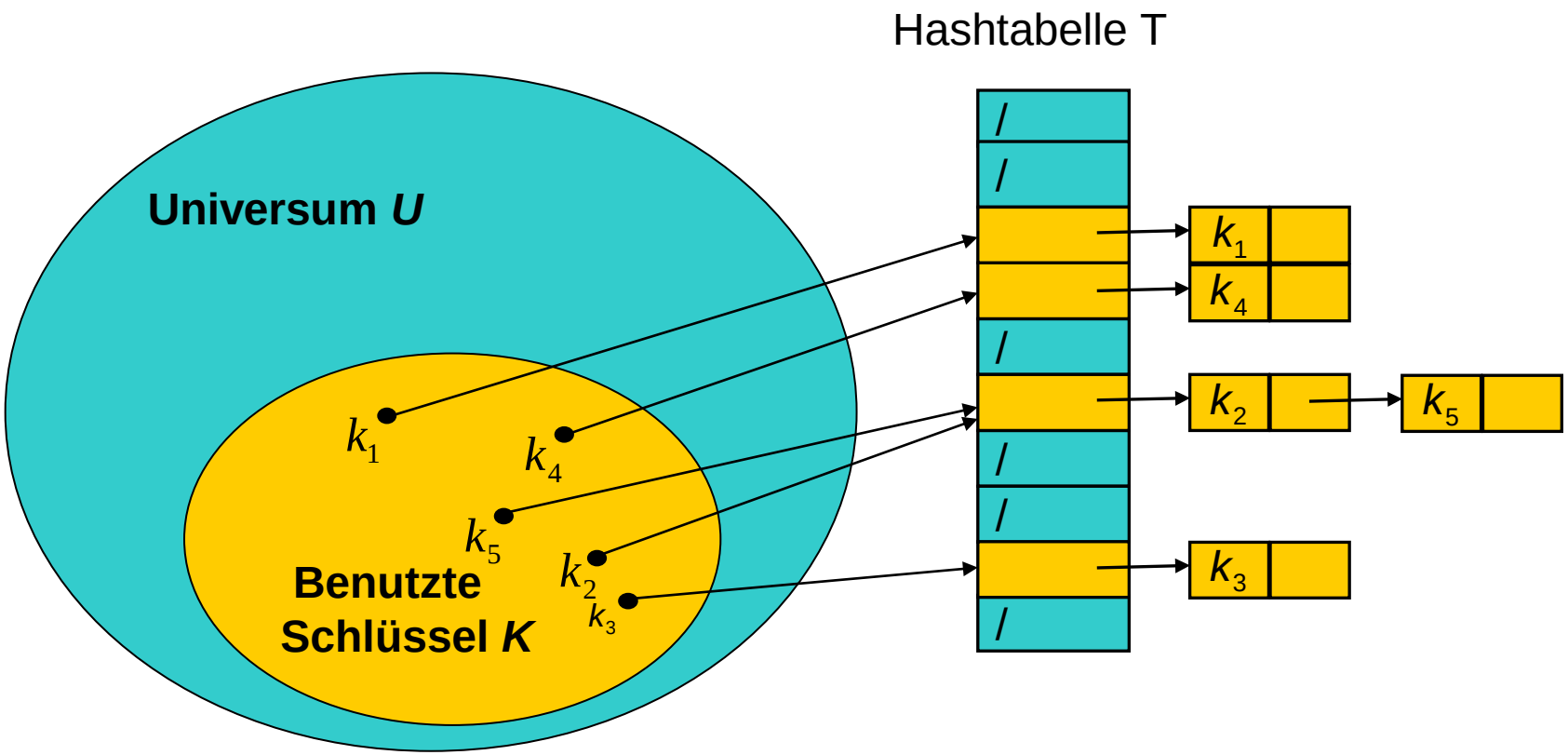


Maßnahmen zur Kollisionsauflösung

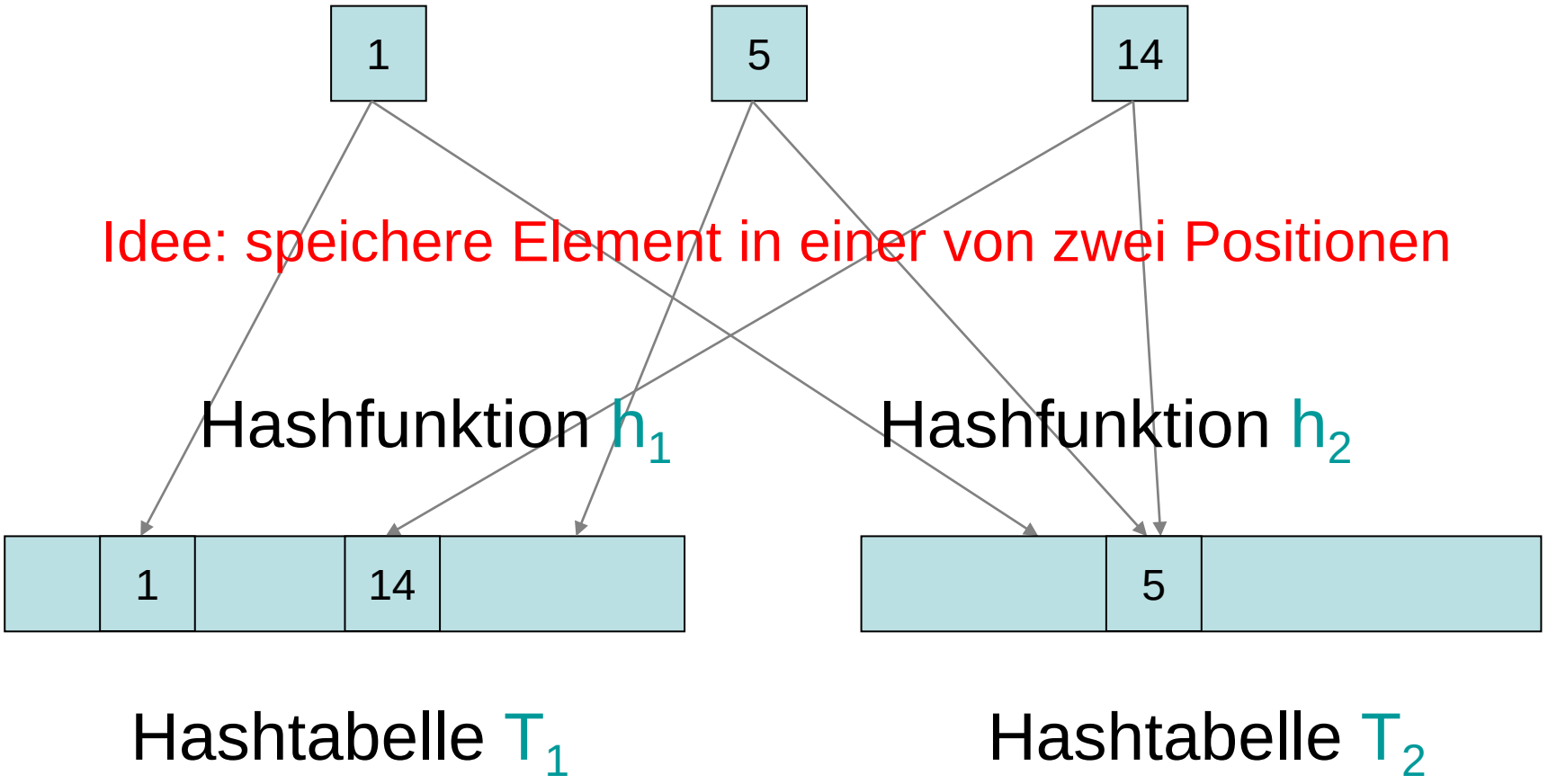
Mögliche Strategien:

- Geschlossene Adressierung
  - Kollisionsauflösung durch Listen
- Offene Adressierung
  - Lineares/Quadratisches Hashing: es wird nach der nächsten freien Stelle in T gesucht
- Kuckuckshashing: geschickte Verwendung von zwei Hashfunktionen

Hashing mit Listen - Illustration



Kuckuckshashing



Kuckuckshashing

T_1, T_2: Hashtabellen der Größe m

Search(T_1,T_2,k):
  if key[T_1[h_1(k)]]=k then return T_1[h_1(k)]
  if key[T_2[h_2(k)]]=k then return T_2[h_2(k)]
  return NIL

Remove(T_1,T_2,k):
  if key[T_1[h_1(k)]]=k then T_1[h_1(k)]←NIL
  if key[T_2[h_2(k)]]=k then T_2[h_2(k)]←NIL

Kuckuckshashing

Insert(T_1,T_2,x):

```
// key[x] schon in Hashtabelle?
if T1[h1(key[x])]=NIL or key[T1[h1(key[x])]]=key[x] then
    T1[h1(key[x])]←x; return
if T2[h2(key[x])]=NIL or key[T2[h2(key[x])]]=key[x] then
    T2[h2(key[x])] ←x; return
// nein, dann einfügen
while true do
    x↔T1[h1(key[x])]  // tausche x mit Pos. in T1
    if x=NIL then return
    x↔T2[h2(key[x])]  // tausche x mit Pos. in T2
    if x=NIL then return
```

Oder maximal d·log n oft, wobei Konstante d so gewählt ist, dass die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs unter der einer Endlosschleife liegt. Bei Misserfolg kompletter Rehash mit neuen, zufälligen h_1, h_2

Priority Queue

M: Menge von Elementen

Jedes Element e identifiziert über key(e).

Operationen:

- insert(M,e): $M:=M\cup\{e\}$
- min(M): gib $e\in M$ mit minimalem key(e) aus
- deleteMin(M): wie min(M), aber zusätzlich $M:=M\setminus\{e\}$, für e mit minimalem key(e)

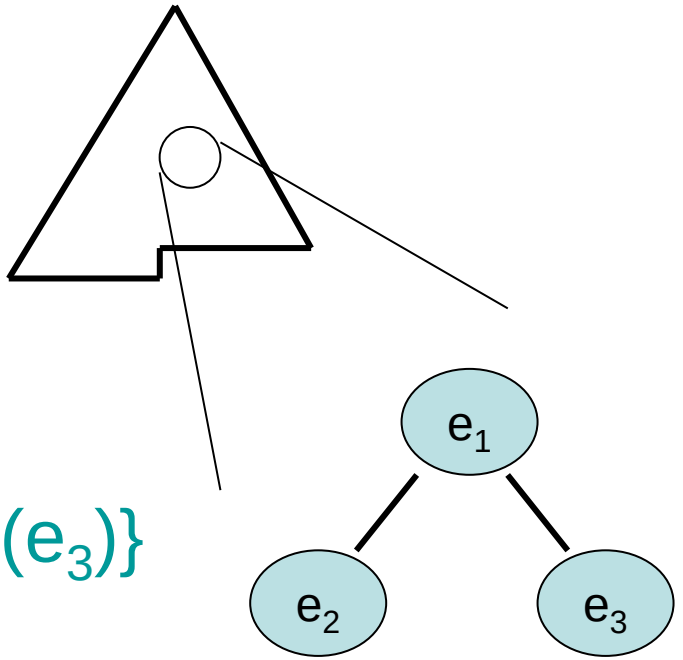
Priority Queue als Heap

Idee: organisiere Daten im binären Baum

Bewahre zwei Invarianten:

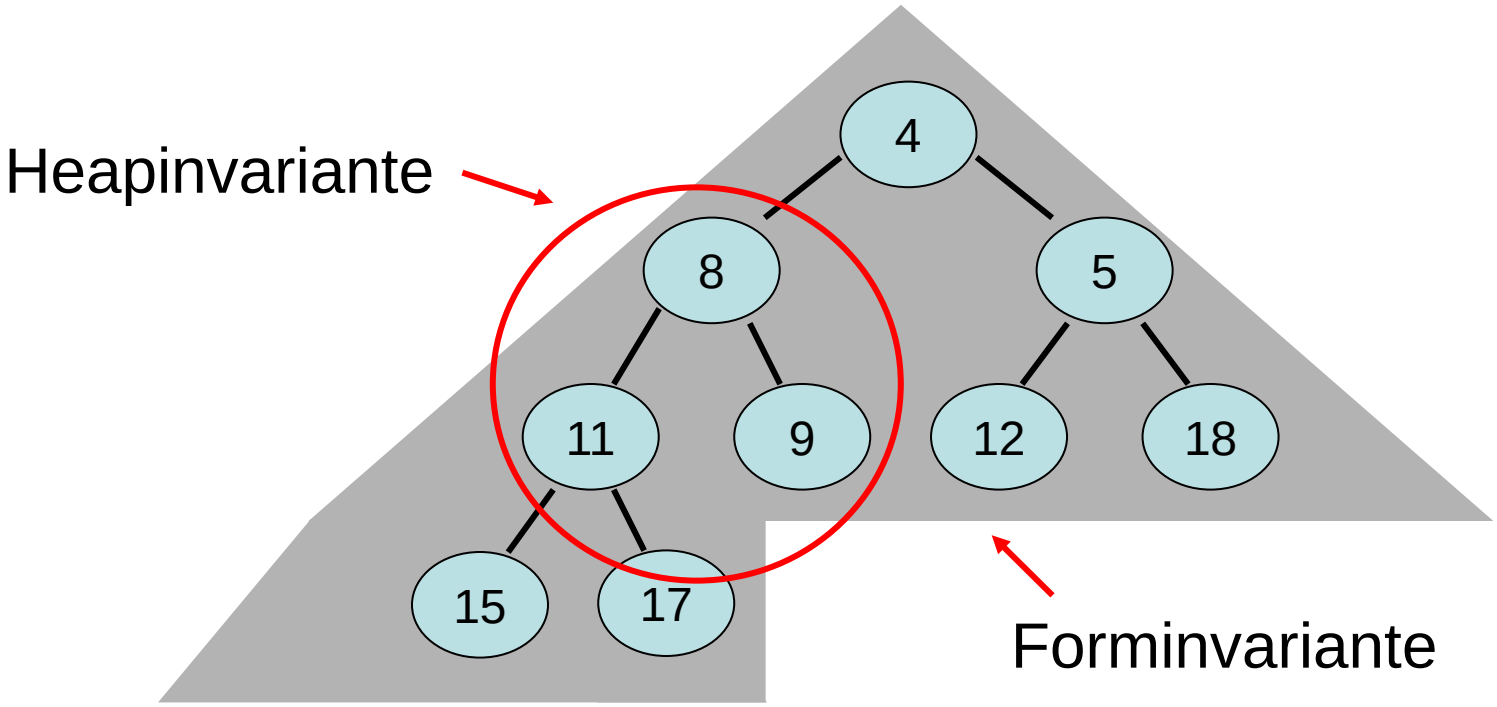
- Form-Invariante: vollst. Binärbaum bis auf unterste Ebene
- Heap-Invariante:

$$key(e_1) \leq \min\{key(e_2), key(e_3)\}$$

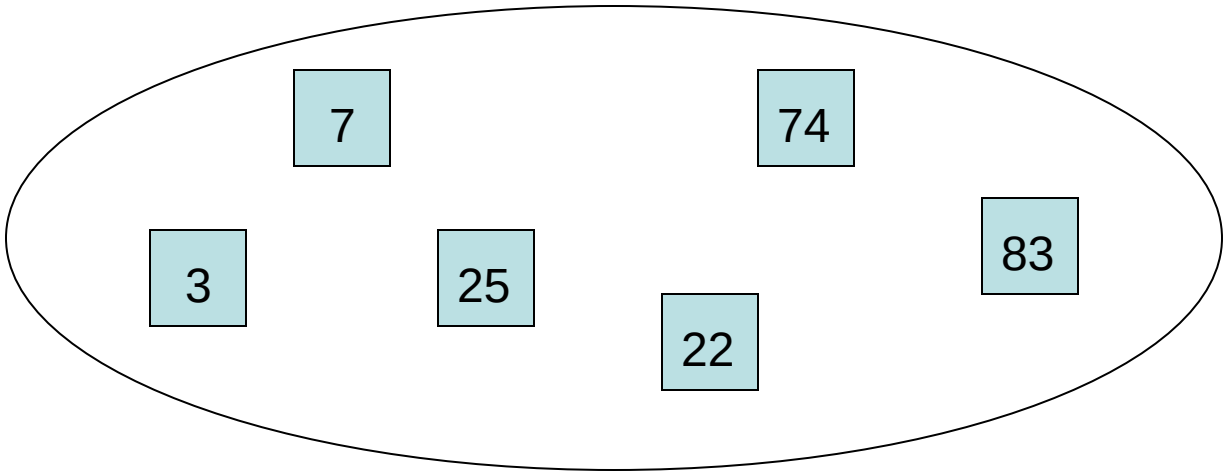


Heap

Beispiel:



Mengen

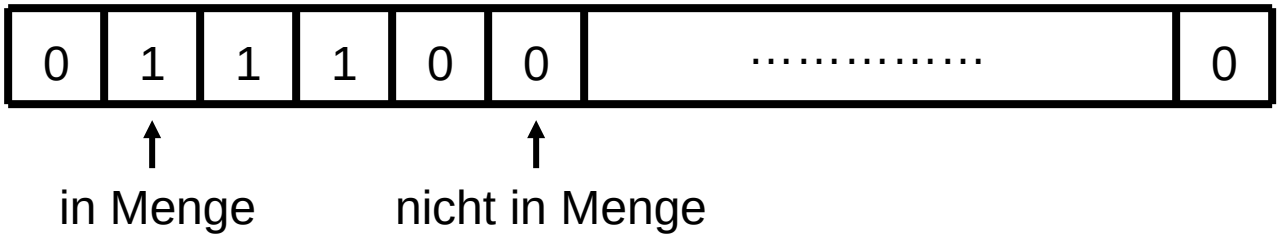


Operationen:

- Member(x,S): testet, ob x ein Mitglied von S ist
- Union(A,B): gibt die Vereinigung von A und B zurück
- Intersection(A,B): gibt den Schnitt von A und B zurück
- Insert/Delete(x,S): füge x in S ein / lösche x aus S

Mengen

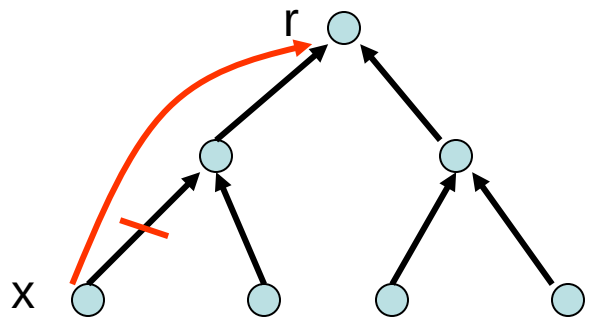
- Implementierung als Array: (vorzuziehen, falls Wertebereich klein)



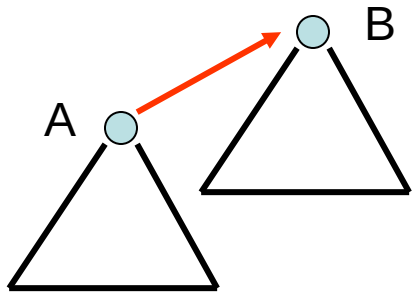
- Implementierung als Hashtabelle
- Implementierung als Suchbaum

Mengen

- Operationen:
  - Union(A,B): gibt A ∪ B zurück
  - Find(x): liefert Menge A von Element x
- Implementierung als Baum:
  Menge identifiziert duch Wurzel des Baums



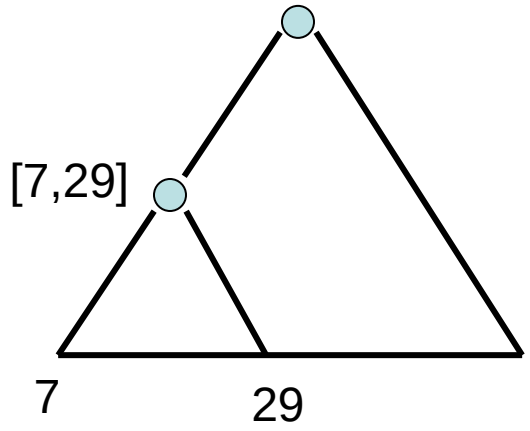
Find(x): biege Zeiger von x und Vorfahren auf r, gib r aus



Union(A,B): verbinde flacheren Baum (A) mit tieferem (B)

Mengen

- Operationen:
  - Intersection(A,B): gibt $A \cap B$ zurück
- Implementierung als Suchbaum:
  Füge Intervall [min(T(v)),max(T(v))] zu jedem Knoten v hinzu, wobei T(v) den Teilbaum mit Wurzel v angibt. Dann können über diese Intervalle effizient gemeinsame Elemente ermittelt werden.



Probleme

- 10038: Jolly Jumpers
- 10591: Happy Number
- 484: The Department of Redundancy Department
- 11678: Exchanging Cards
- 1136: Help R2-D2!
- 10125: Sumsets

Hausaufgabe:

- 443: Humble Numbers