

Proseminar

Effiziente Algorithmen

Kapitel 4: Sortieren, Selektieren und Suchen

Prof. Dr. Christian Scheideler
WS 2022

Übersicht

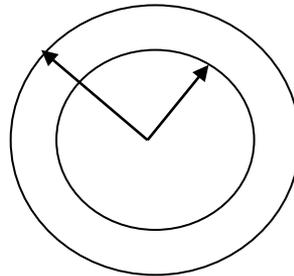
- Sortieren
- Selektieren
- Suchen

Sortierproblem



Ordnungen

- Ordnung auf **Zahlen**: klar
- Ordnung auf **Vektoren**: z.B. Länge des Vektors



- Ordnung auf **Namen**: lexikographische Ordnung (erst alle Namen, die mit A beginnen, dann B, usw.)

Heapsort

Procedure Heapsort(a : Array $[1..n]$ of
Element)

$H := \text{buildHeap}(a)$; // Zeit $O(n)$

for $i := 1$ to n do

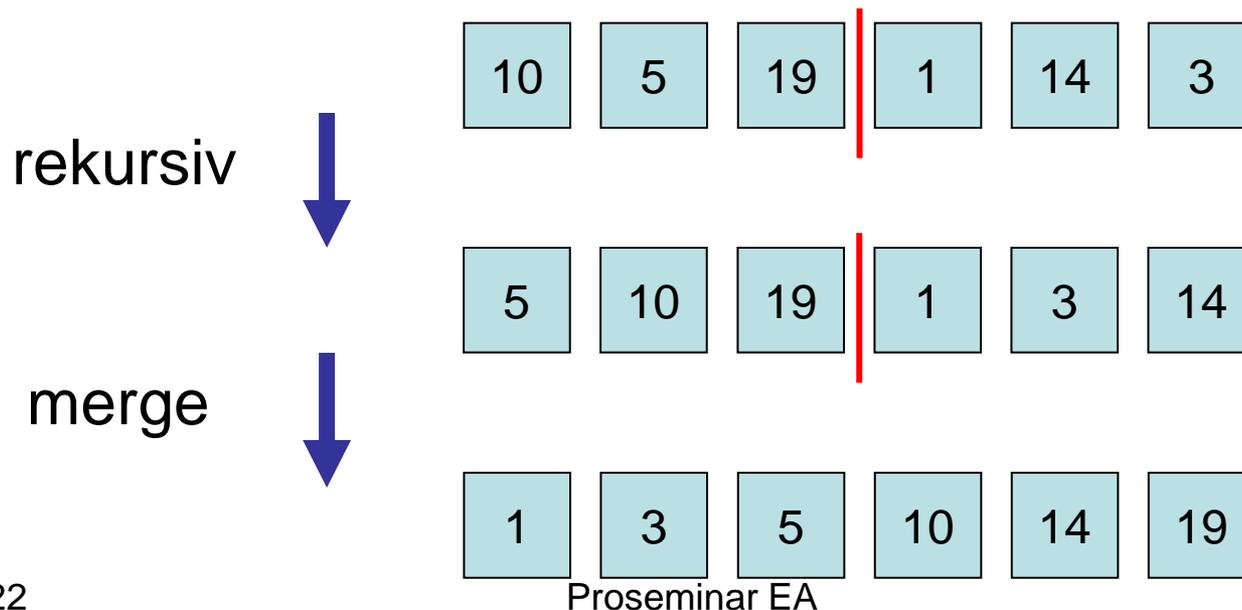
// speichere Minimum in H in $a[i]$

$a[i] := \text{deleteMin}(H)$ // Zeit $O(\log n)$

Also insgesamt Laufzeit $O(n \log n)$.

Mergesort

Idee: zerlege Sortierproblem rekursiv in Teilprobleme, die separat sortiert werden und dann verschmolzen werden

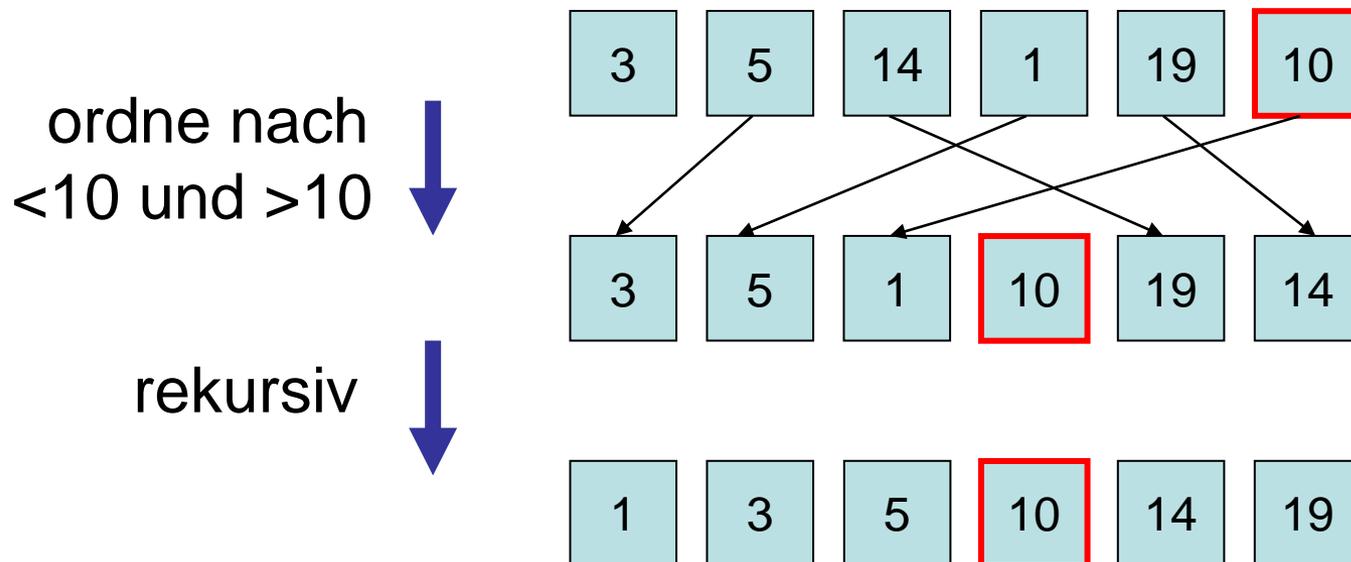


Mergesort

```
Procedure Mergesort(l,r: Integer)
  // a[l..r]: zu sortierendes Feld
  if l=r then return // fertig
  m:=  $\lfloor (r+l)/2 \rfloor$  // Mitte
  Mergesort(l,m)
  Mergesort(m+1,r)
  j:=l; k:=m+1
  for i:=1 to r-l+1 do // in Hilfsfeld b mergen
    if j>m then b[i]:=a[k]; k:=k+1
    else
      if k>r then b[i]:=a[j]; j:=j+1
      else
        if a[j]<a[k] then b[i]:=a[j]; j:=j+1
        else b[i]:=a[k]; k:=k+1
  for i:=1 to r-l+1 do a[l-1+i]:=b[i] // b zurückkopieren
```

Quicksort

Idee: ähnlich wie Mergesort, aber Aufspaltung in Teilfolgen nicht in Mitte sondern nach speziellem Pivotelement

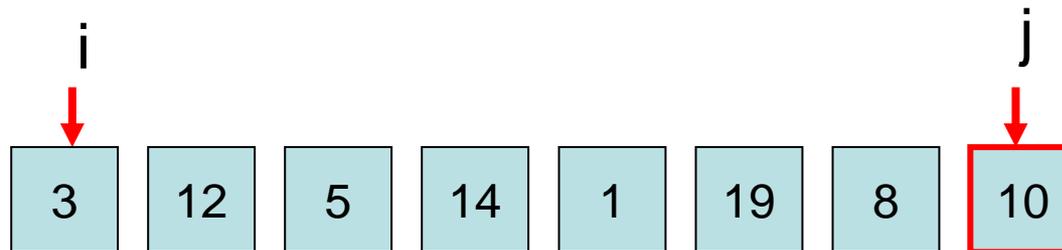


Quicksort

```
Procedure Quicksort(l,r: Integer)
  // a[l..r]: zu sortierendes Feld
  if r>l then
    v:=a[r]; i:=l-1; j:=r
    repeat // ordne Elemente in [l,r-1] nach Pivot v
      repeat i:=i+1 until a[i]>=v
      repeat j:=j-1 until a[j]<v or j=l
      if i<j then a[i] ↔ a[j]
    until j<=i
    a[i] ↔ a[r] // bringe Pivot an richtige Position
    Quicksort(l,i-1) // sortiere linke Teilfolge
    Quicksort(i+1,r) // sortiere rechte Teilfolge
```

Quicksort

Beispiel für einen Durchlauf mit Pivot 10:



Quicksort

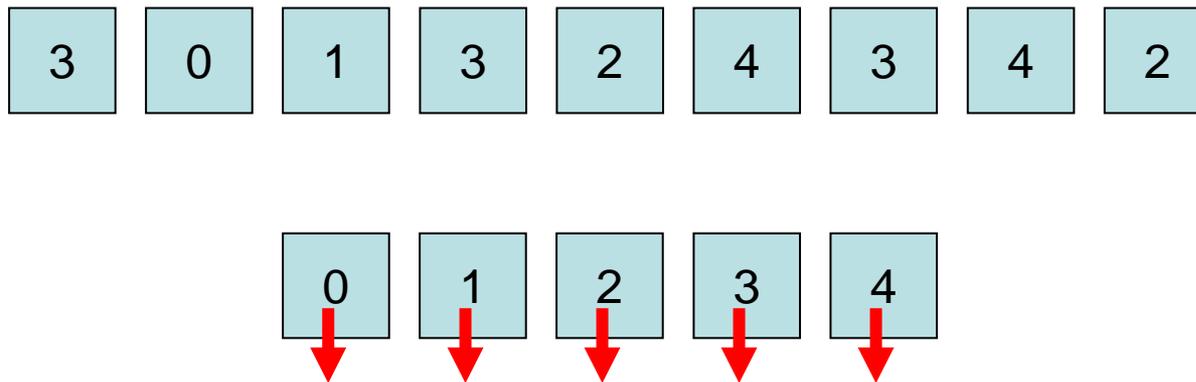
Problem: im worst case kann Quicksort $\Theta(n^2)$ Laufzeit haben (wenn schon sortiert)

Lösungen:

- wähle **zufälliges** Pivotelement
(Laufzeit $O(n \log n)$ mit hoher W.keit)
- berechne Median (Element in Mitte)
→ dafür Selektionsalgorithmus (später)

Sortieren schneller als $O(n \log n)$

- **Annahme:** Elemente im Bereich $\{0, \dots, K-1\}$
- **Strategie:** verwende Feld von K Listenzeigern



Sortieren schneller als $O(n \log n)$

```
Procedure KSort(S: List of Element)
  b: Array [0..K-1] of List of Element
  foreach  $e \in S$  do
    // hänge e hinten an Liste b[key(e)] an
    b[key(e)].pushBack(e)
  // binde Listen zusammen zu einer Liste S
  S:=concatenate(b[0],...,b[K-1])
```

Laufzeit: $O(n+K)$ (auch für Bitkomplexität)

Problem: nur sinnvoll für $K=o(n \log n)$

Radixsort

Ideen:

- verwende K -adische Darstellung der Schlüssel
- Sortiere Ziffer für Ziffer gemäß K Sort
- Behalte Ordnung der Teillisten bei

Annahme: alle Zahlen $\leq K^d$

Radixsort

```
Procedure Radixsort(s: Sequence of Element)
  for i:=0 to d-1 do
    KSort(s,i) // sortiere gemäß  $key_i(x)$ 
               // mit  $key_i(x) = (key(x) \text{ div } K^i) \bmod K$ 
```

Laufzeit: $O(d(n+K))$

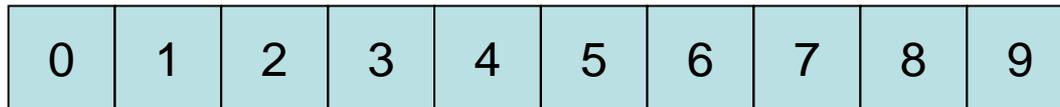
Angenommen, alle Zahlen $< n^d$ für konstantes d .
In diesem Fall ($K=n$) Laufzeit $O(n)$.

Radixsort

Beispiel:



Ordnung nach Einerstelle:

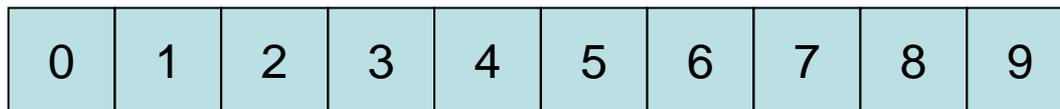


Radixsort

Ergebnis nach Einerstelle:



Ordnung nach Zehnerstelle:



Radixsort

Ergebnis nach Zehnerstelle:



Ordnung nach Hunderterstelle:



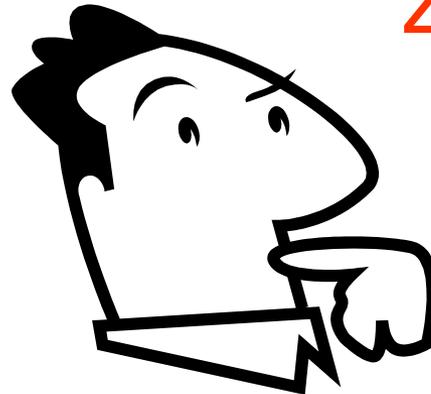
Radixsort

Ergebnis nach Hunderterstelle:



Sortiert!

Zauberei???



Radixsort

Korrektheit:

- Für jedes Paar x, y mit $\text{key}(x) < \text{key}(y)$ gilt: es existiert i mit $\text{key}_i(x) < \text{key}_i(y)$ und $\text{key}_j(x) = \text{key}_j(y)$ für alle $j > i$
- Schleifendurchlauf für i : $\text{pos}_S(x) < \text{pos}_S(y)$ ($\text{pos}_S(z)$: Position von z in Folge S)
- Schleifendurchlauf für $j > i$: Ordnung wird **beibehalten** wegen pushBack in KSort

Übersicht

- Sortieren
- **Selektieren**
- Suchen

Selektion

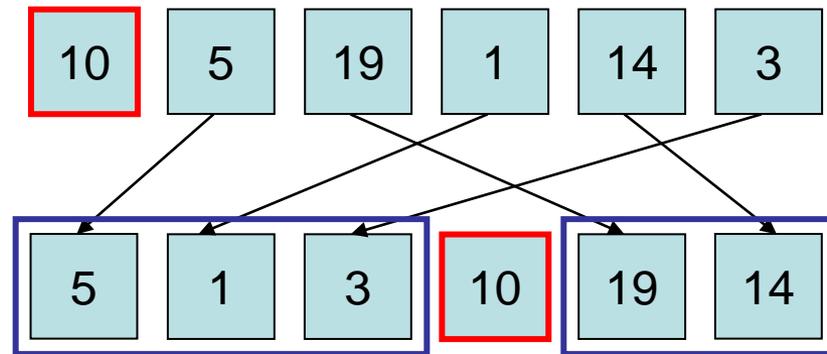
Problem: finde k -kleinstes Element in einer Folge von n Elementen

Lösung: sortiere Elemente (z.B. Mergesort), gib k -tes Element aus \rightarrow Zeit $O(n \log n)$

Geht das auch schneller??

Selektion

Ansatz: verfahren ähnlich zu Quicksort



- j : Position des Pivotelements
- $k < j$: mach mit linker Teilfolge weiter
- $k > j$: mach mit rechter Teilfolge weiter

Selektion

```
Function Quickselect(l,r,k: Integer): Element
// a[l..r]: Restfeld, k: k-kleinstes Element, l<=k<=r
if r=l then return a[l]
z:=zufällige Position in {l,...,r}; a[z] ↔ a[r]
v:=a[r]; i:=l-1; j:=r
repeat // ordne Elemente in [l,r-1] nach Pivot v
  repeat i:=i+1 until a[i]>=v
  repeat j:=j-1 until a[j]<v or j=l
  if i<j then a[i] ↔ a[j]
until j<=i
a[i] ↔ a[r]
if k<i then e:=Quickselect(l,i-1,k)
if k>i then e:=Quickselect(i+1,r,k)
if k=i then e:=a[k]
return e
```

Quickselect

- $C(n)$: erwartete Anzahl Vergleiche

Satz: $C(n) = O(n)$

Beweis:

- Pivot ist **gut**: keine der Teilfolgen länger als $2n/3$
- Sei $p = \Pr[\text{Pivot ist gut}]$



- $p = 1/3$

BFPRT-Algorithmus

Gibt es auch einen deterministischen Selektionsalgorithmus mit linearer Laufzeit?

Ja, den **BFPRT-Algorithmus** (benannt nach den Erfindern Blum, Floyd, Pratt, Rivest und Tarjan).

BFPRT-Algorithmus

- Sei m eine ungerade Zahl ($5 \leq m \leq 21$).
- Betrachte die Zahlenmenge $S = \{a_1, \dots, a_n\}$.
- Gesucht: k -kleinste Zahl in S

Algorithmus BFPRT(S, k):

1. Teile S in $\lceil n/m \rceil$ Blöcke auf, davon $\lfloor n/m \rfloor$ mit m Elementen
2. Sortiere jeden dieser Blöcke (z.B. mit Insertionsort)
3. $S' :=$ Menge der $\lceil n/m \rceil$ Mediane der Blöcke.
4. $s := \text{BFPRT}(S', |S'|/2)$ // berechnet Median der Mediane
5. $S_1 := \{x \in S \mid x < s\}$; $S_2 := \{x \in S \mid x > s\}$
6. Falls $k \leq |S_1|$, dann return $\text{BFPRT}(S_1, k)$
7. Falls $k > |S_1| + 1$, dann return $\text{BFPRT}(S_2, k - |S_1| - 1)$
8. return m

BFPRT-Algorithmus

Laufzeit $T(n)$ des BFPRT-Algorithmus:

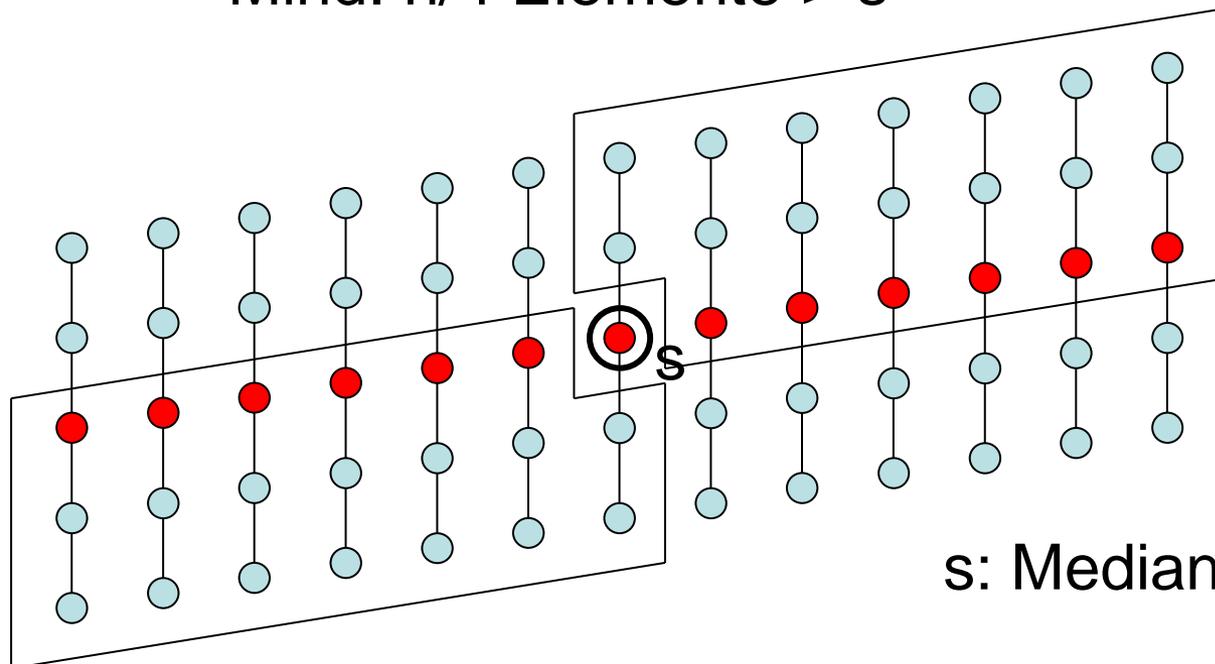
- Schritte 1-3: $O(n)$
- Schritt 4: $T(\lceil n/m \rceil)$
- Schritt 5: $O(n)$
- Schritt 6 bzw. 7: ???

Lemma: Schritt 6/7 ruft BFPRT mit maximal $\lfloor (3/4)n \rfloor$ Elementen auf

BFPRT-Algorithmus

Beweis: O.B.d.A. sei $m=5$

Mind. $n/4$ Elemente $> s$



● : Median

s: Median der Mediane

Mind. $n/4$ Elemente $< s$

BFPRT-Algorithmus

Laufzeit für $m=5$:

$$T(n) \leq T(\lfloor (3/4)n \rfloor) + T(\lceil n/5 \rceil) + c \cdot n$$

für eine Konstante c .

Satz: $T(n) \leq d \cdot n$ für eine Konstante d .

Beweis: Übung.

Übersicht

- Sortieren
- Selektieren
- Suchen

Suchen

- Balancierter Suchbaum
AVL-Baum, rot-schwarz-Baum, Splay
Baum (siehe Kapitel 2)
- Hashing (siehe Kapitel 2)

Probleme

- 10191: Longest Nap
- 612: DNA Sorting
- 10152: ShellSort
- 10041: Vito's family
- 10026: Shoemaker's Problem
- 10037: Bridge
- 11057: Exact Sum

Hausaufgabe:

- 855: Lunch in Grid City